ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Томский государственный педагогический университет

**Э.Г. Гельфман, Л.Н. Демидова,
Н.И. Зильберберг, И.Г. Просвирова**

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Рабочая тетрадь по математике

5–6 класс

**Томск
Издательство Томского государственного
педагогического университета
2008**

Гельфман Э.Г., Демидова Л.Н., Зильберберг Н.И., Просвирова И.Г. Положительные и отрицательные числа: Рабочая тетрадь по математике. 5–6 класс. Томск: изд-во Томского государственного педагогического университета, 2008. 96 с.

Рабочая тетрадь является приложением к развивающему программному комплексу по математике. Руководитель проекта – Э.Г. Гельфман.

Первый раздел рабочей тетради подготовлен И.Г. Просвировой, второй – Л.Н. Демидовой, третий – Н.И. Зильбербергом.

Авторы благодарят за помощь в подготовке данной тетради *В.Я. Эппа*.

Научное редактирование: *С.Я. Гриншпон*, доктор физико-математических наук, профессор, *А.Г. Подстригич,* кандидат педагогических наук, доцент ТГПУ.

Дорогие ребята!

Рабочая тетрадь «Положительные и отрицательные числа» состоит из трёх частей.

В первый раздел вошли задания тренировочного характера по темам: применение отрицательных чисел, координатная прямая и координатная плоскость, сравнение, сложение, вычитание, умножение деление положительных и отрицательных чисел, решение уравнений.

Задания второго раздела помимо тренировки дают возможность находить закономерности в действиях над положительными и отрицательными числами, делать обобщения и на этой основе составлять свои задания.

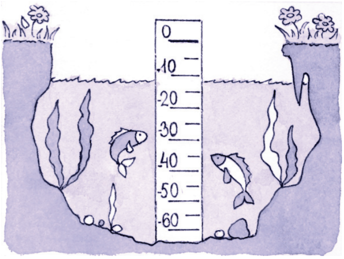
В рабочую тетрадь включены задания, содержащие тексты из учебников и пособий по математике. Эти задания нацелены на развитие умения интерпретировать текст, то есть представить предложенный текст по-своему. Например, текст можно представить графически: схемой, таблицей, кластером. И наоборот, схему можно описать словами, или по данному тексту составить свой текст (приём РАФТ).

В третьем разделе предлагается выполнить творческие задания по теме; поработать над олимпиадными заданиями; а также исследовать некоторые наборы чисел, понаблюдать за действиями над ними, высказать и проверить свои предположения.

Свою работу можно выполнять последовательно, переходя от раздела к разделу. А можно выбрать понравившийся раздел или отдельные задания из него и получить удовольствие от самостоятельной работы.

Удачи Вам в этой работе!

Содержание



Раздел I

ПОТРЕНИРУЙТЕСЬ В ДЕЙСТВИЯХ НАД ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ

Где можно встретить положительные и отрицательные числа?

Задание 1. Выразите с помощью нуля, положительных или отрицательных чисел следующие утверждения об изменении температуры, уровня воды и высоты:

1.а) Температура воздуха составляет пять градусов выше нуля.

б) Температура воздуха составляет двадцать семь градусов ниже нуля.

в) Температура воздуха равна нулю.

2. а) Температура за сутки поднялась на 8°.

б) Температура за сутки опустилась на 10°.

в) Температура за сутки не изменилась.

3. а) Уровень воды в реке увеличился на 2 см.

б) Уровень воды в реке понизился на 3 см.

в) Уровень воды в реке не изменился.

4. а) Альпинист поднялся на 2 км.

б) Альпинист спустился на 3 км.

в) Альпинист прошел горизонтальный участок пути.

г) Альпинист поднялся в гору и спустился в то место, откуда начинал подъем.

5. В Древней Индии и Китае положительные числа трактовались как «прибыль», «доход», а отрицательные — как «долг», «убыток».

а) долг в 100 юаней:

б) доход в 15 юаней:

в) прибыль величиной 20 рублей:

г) убыток величиной 48 рублей:

Задание 2. В учебнике «Математика 5 класс. Часть 2». Серия «Математика. Психология. Интеллект» черепаха Тортила рассказывает о том, как люди понимали и использовали отрицательные числа.

Старая и мудрая черепаха помнит о том, какой была математика в давние времена. Она знает, что на разных этапах человеческой истории математики по-разному объясняли смысл тех или иных математических понятий, предлагали различные формы выражения тех или иных математических законов.

Тортила. Ах, детки! Я рада, что вы легко приняли отрицательные числа. История же говорит о том, что люди долго не могли к ним привыкнуть. Отрицательные числа казались непонятными, ими не пользовались, просто не видели в них особого смысла. Положительные числа долго трактовали как «прибыль», а отрицательные — как «долг», «убыток».

Лишь в Древней Индии да Китае догадались вместо слов «долг в десять юаней» писать просто «десять юаней», но рисовать эти иероглифы (в Китае слова не записывают буквами, а рисуют иероглифами) черной тушью. Имущество, прибыль записывались тушью другого цвета, красной. А знаков «+» и «–», о которых мы говорили, в древности не было ни для чисел, ни для действий.

Греки поначалу знаков не использовали, пока в III веке Диофант Александрийский не стал обозначать вычитание значком ↑. Но у других ученых в то время я ничего подобного не встречала.

Бабушка говорила мне, будто давным-давно в Италии ростовщики, давая деньги в долг, ставили перед именем должника сумму долга и черточку, вроде минуса, а когда должник возвращал деньги, зачеркивали ее, получалось что-то вроде плюса. Можно же плюс считать зачеркнутым минусом?!

Не знаю, правда ли это, знаю только, что немецкий математик Ян Видман уже писал знаки «+» и «–» для сложения и вычитания. А чуть позднее немецкий ученый Михель Штифель написал «Полную Арифметику», которая была напечатана в 1544 году. Именно напечатана, а не написана от руки, как было когда-то.

У меня и сейчас хранится эта книга. В ней встречаются такие записи для чисел:

0 – 2; 0 + 2;
0 – 5; 0 + 7.

Числа первого вида, отрицательные числа, он называл «меньше, чем ничего» или «ниже, чем ничего». Мне, помнится, очень нравилось такое название отрицательных чисел. Числа второго вида, положительные числа, можно называть «больше, чем ничего» или «выше, чем ничего». Вам, конечно, понятны эти названия, потому что «ничего» — это нуль.

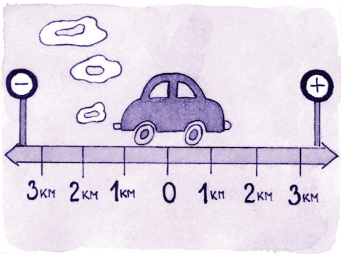
Сколько помню себя, об этих отрицательных и положительных числах всегда велись разговоры в ученых кругах. Предлагались, кажется, другие обозначения, придумывались изображения.

1. Информацию об истории отрицательных чисел можно собрать, например, в такую таблицу.

Отрицательные числа	Китай ____ в.	Индия ____ в.	Греция III в.		
Смысл	*долг*				
Запись, изображение	–				
Применение					

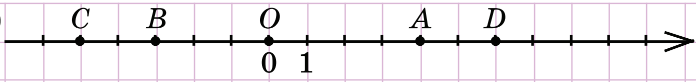
Продолжите заполнение таблицы. Добавьте в эту таблицу новые столбики и строчки или составьте свою таблицу, по которой можно представить, как люди понимали и использовали отрицательные числа.

2. Попробуйте придумать свое обозначение (изображение) для отрицательных чисел.

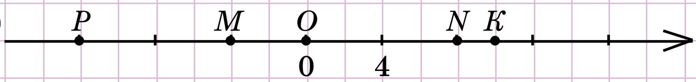


Координатная прямая

Задание 3. 1. Запишите координаты точек, отмеченных на прямой.

а) 

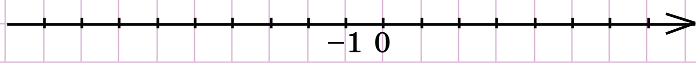
$A($ $\quad)$; $B($ $\quad)$; $C($ $\quad)$; $D($ $\quad)$; $O($ $\quad)$

б) 

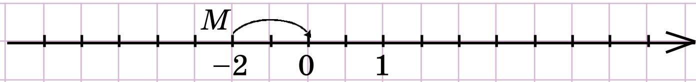
$M($ $\quad)$; $N($ $\quad)$; $P($ $\quad)$; $O($ $\quad)$; $K($ $\quad)$

2. Отметьте на координатной прямой точки с данными координатами:

A (3); B (−7); C (0); D (6); E (−3); G (1).



Задание 4. Запишите координаты точек, в которые попадает точка $M(-2)$ при перемещении ее по координатной прямой:



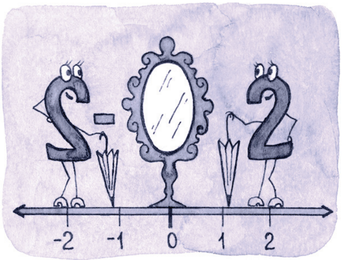
а) на 2 единицы влево:

б) на 2 единицы вправо:

в) на 5 единиц влево:

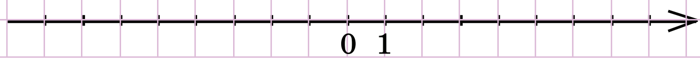
г) на 5 единиц вправо:

д) на 9 единиц вправо:



Противоположные числа

Задание 5. Отметьте на числовой прямой точки, соответствующие числам:
1; -7; -4; 3,5; 6; -1; 4; 7; -8; 0.



Выпишите пары точек, координаты которых являются противоположными числами:

Задание 6. Заполните таблицу.

Число	x	17			20,2	$-0{,}6$	
Противоположное число	$-x$		2,8	-12			
Расстояние между точками, соответствующими противоположным числам							36

Задание 7. Продолжите предложение:

а) Если x — положительное число, то $(-x)$ —

б) Если x — отрицательное число, то $(-x)$ —

в) Если x — нуль, то $(-x)$ —

г) Если $(-x)$ — положительное число, то x —

д) Если $(-x)$ — отрицательное число, то x —

е) Если $(-x)$ — нуль, то x —

Задание 8. Заполните пропуски:

а) $-(-3) =$ ☐ ; б) $-(-0{,}75) =$ ☐ ;

в) $-(+5) =$ ☐ ; г) $-(+11{,}3) =$ ☐ ;

д) $-(-(-1)) =$ ☐ ; е) $-(-(3{,}2)) =$ ☐ .

Задание 9. Решите уравнение, используя понятие противоположных чисел

а) $-x = -13$; $x =$ ☐ ;

б) $-x = 7{,}53$; $x =$ ☐ ;

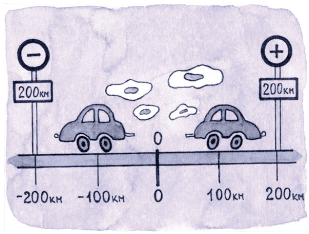
в) $-x = -5{,}01$; $x =$ ☐ ;

г) $-x = 0$; $x =$ ☐ ;

д) $-x = к$; $x =$ ☐ ;

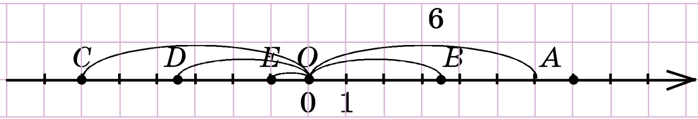
е) $-x = -b$; $x =$ ☐ .

Составьте свое уравнение.



Модуль числа

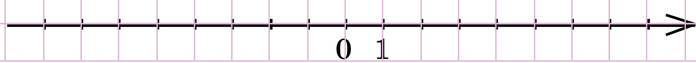
Задание 10. 1. Укажите расстояние от начала отсчета до точек, изображенных на рисунке:



$OA =$ ☐ ; $OD =$ ☐ ; $OB =$ ☐ ;

$OC =$ ☐ ; $OE =$ ☐ .

2. Постройте точку на координатной прямой, если известно, что модуль ее координаты равен 5.



Задание 11. Соедините стрелками соответствующие числа левого и правого столбцов.

x
−3,2
7
0
−10,01
23,5
−8,3
13
10,01
3,2

$\lvert x \rvert$
0
8,3
7
23,5
13
10,01
3,2
35

Почему правый столбец короче левого столбца?

Впишите недостающие числа в левый столбец.

Задание 12. Заполните таблицу:

Число	Противоположное число	Модуль числа	Модуль противоположного числа
x	$-x$	$\lvert x \rvert$	$\lvert -x \rvert$
−13			
	−7,6		
		17	
			2,9
			−18

1. Удалось вам заполнить последнюю строку таблицы?

2. Сравните записи в 3 и 4 столбцах. Сделайте вывод:

Модули ________________ *чисел* ________________ .

Задание 13. Решите уравнение, используя понятие «модуль числа»:

а) $|x| = 3$; $x = 3$ или $x = -3$;

б) $|x| = 7{,}4$; $x =$ или $x =$

в) $|x| = -5$;

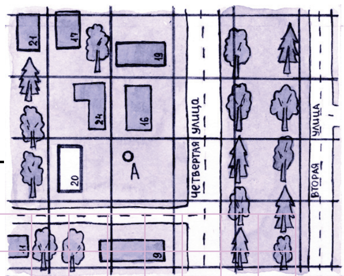
г) $|-x| = 0{,}01$;

д) $-|x| = 125$;

е) $-|-x| = -300$;

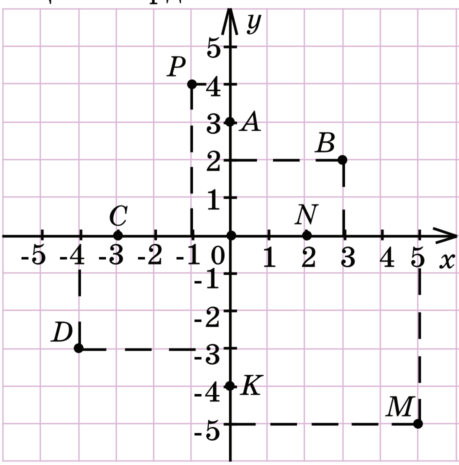
ж) ;

з) $x = 0$;



Координатная плоскость

Задание 14. Запишите недостающие координаты точек.



$A($; $3)$

$B(3;$ $)$

$C(-3;$ $)$

$D($; $)$

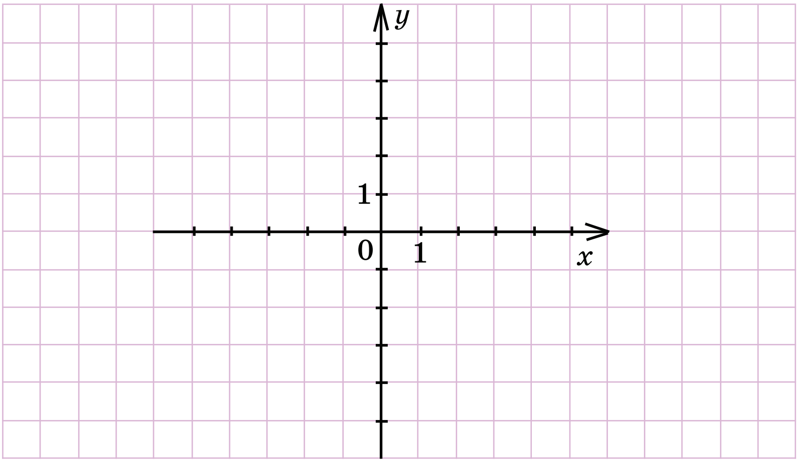
$M($; $-5)$

$N($; $0)$

$K($; $-4)$

$P(-1;$ $)$

Задание 15. Отметьте на координатной плоскости точки $A\ (-5;\ 7)$; $B\ (1;\ 5)$, $C\ (4;\ -2)$, $D\ (-1;\ -1)$.



Укажите, в каких четвертях лежат отмеченные точки:

т. A — в четверти,
т. B — в четверти,
т. C — в четверти,
т. D — в четверти.

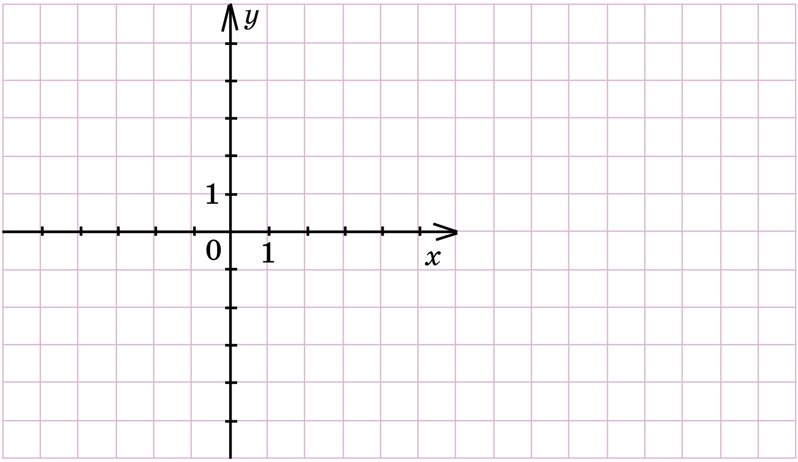
Какие точки расположены выше оси абсцисс?

ниже оси абсцисс?

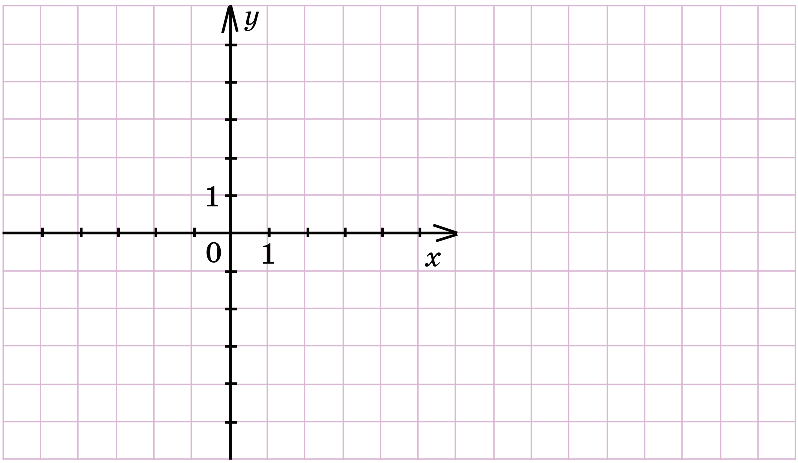
Задание 16. Постройте прямоугольник с вершинами в точках

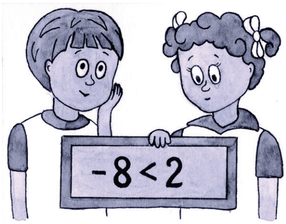
$$A\ (-1;\ 2);\ B\ (4;\ 2);\ C\ (4;\ -2);\ D\ (-1;\ -2)$$

и найдите его площадь S_{ABCD}.



Задание 17. Постройте в координатной плоскости квадрат с вершинами в узлах клетчатой сетки. Укажите координаты вершин квадрата.





Сравнение чисел

Задание 18. 1. Вставьте знак > или < так, чтобы получилось верное неравенство:

а) 38 ◯ 64; д) 121,1 ◯ 21,11;

б) −13 ◯ −103; е) −17,5 ◯ −7,57;

в) 0 ◯ −20; ж) 38,5 ◯ −38,5.

2. Запишите число, чтобы получилось верное неравенство:

а) −17 < ☐ ; б) ☐ > 0.

3. Заполните пропуски в утверждениях о сравнении положительных и отрицательных чисел:

а) *Из двух положительных чисел больше то, модуль которого*

б) *Любое отрицательное число* *любого положительного числа.*

в) *Из двух* *чисел больше то, модуль которого меньше.*

г) *Любое положительное число* *нуля.*

д) *Любое* *число меньше нуля.*

Задание 19. Заполните таблицу.

Расположение точек на числовой оси			Соответствующее числовое неравенство
$A(-7)$	правее	$B(-12)$	$-7 > -12$
$K(-15)$		$N(0{,}5)$	
$M(3{,}2)$		$P(-300)$	
$R(-9{,}7)$		$O(0)$	
$O(0)$		$S(1{,}001)$	

Задание 20. Вставьте пропущенную цифру:

а) $-2\square5{,}8 > -2\square5{,}8$; б) $-\square3 < \square3$;

в) $71{,}\square > 71{,}\square$; г) $-24\square{,}7 < -241{,}\square$.

Задание 21. Сколько целых чисел расположено:

а) между числами $-3{,}7$ и $3{,}7$;

б) между числами $-18{,}5$ и $0{,}85$;

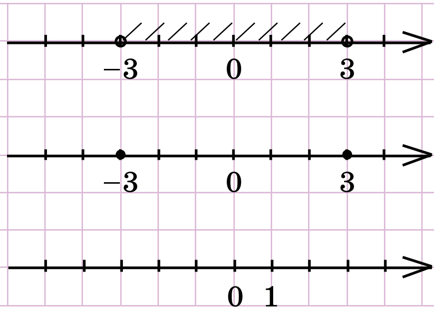
в) между числами -153 и -103?

Задание 22. Укажите на числовой прямой все такие точки, координаты которых удовлетворяют неравенству:

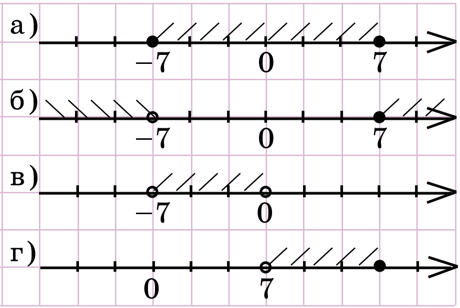
а) $|x| < 3$

б) $|x| \geq 3$

в) $|x| \leq 2{,}5$



Задание 23. Установите соответствие:



$-7 < x < 0$

$x > 7$

$x < 7$

$x < -7$

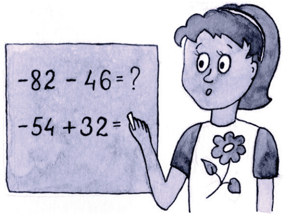
$|x| > 7$

$|x| \leq 7$

$-7 \leq x \leq 7$

$0 < x < 7$

Сложение и вычитание положительных и отрицательных чисел



Задание 24. Заполните пропуски:

а) $12 + 13 = \square$; б) $-7 + (-20) = \square$;
в) $-102 + (-2) = \square$; г) $83 + 39 = \square$;
д) $-8 + 12 = \square$; е) $102 + (-2) = \square$;
ж) $-153 + 47 = \square$; з) $5 + (-95) = \square$;
и) $0 + (-11) = \square$; к) $-8 + 0 = \square$;
л) $13 + (-13) = \square$; м) $-25 + 25 = \square$.

Заполните пропуски в утверждениях:

1. *Чтобы сложить два числа с одинаковыми знаками, надо поставить их* __________ *знак и приписать* __________ *модулей.*

2. *Чтобы сложить два числа с разными знаками и разными модулями, нужно поставить знак числа* __________ *и приписать к нему разность* __________.

3. *Сумма* __________ *чисел равна нулю.*

4. *Если одно из слагаемых равно нулю, то сумма равна* __________.

Приведите по два своих примера на каждое правило.

Задание 25. Вычислите:

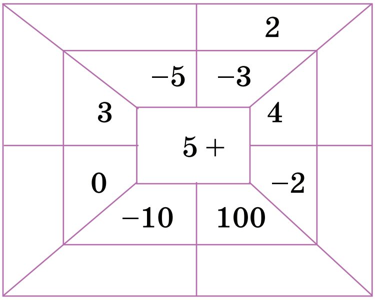
а) $12{,}5 + 13{,}7 = \square$; б) $-0{,}7 + (-13{,}1) = \square$;
в) $-102 + (-2{,}2) = \square$; г) $83{,}01 + 3{,}9 = \square$;
д) $-8{,}4 + (12{,}4) = \square$; е) $102 + (-1{,}9) = \square$;

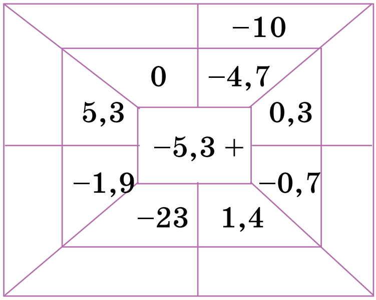
ж) $-153 + 47 = \boxed{\quad}$; з) $0{,}5 + (-0{,}95) = \boxed{\quad}$;

и) $0 + (-11{,}6) = \boxed{\quad}$; к) $-8{,}9 + 0 = \boxed{\quad}$;

л) $13{,}2 + (-13{,}2) = \boxed{\quad}$; м) $-25 + 25 = \boxed{\quad}$.

Задание 26. Заполните пустые места по образцу.





Задание 27. Заполните таблицу, выполнив сложение.

$+$	$-7{,}9$	25	-98	$2{,}13$	$-9{,}05$
-25					
$7{,}9$					
98					

Задание 28. Сравните значения выражений:

а) $-1{,}75 + (-2{,}25) \bigcirc -7{,}5 + 3{,}5$;

б) $2{,}84 + (-3{,}06) \bigcirc 28{,}4 + (-25{,}9)$;

в) $-473 + (-3{,}7) \bigcirc -2{,}07 + (-502{,}7)$;

г) $16{,}9 + (-0{,}09) \bigcirc 35{,}9 + (-35{,}9)$.

Задание 29. Вставьте пропущенное число так, чтобы равенство стало верным:

а) $3 + \boxed{\quad} = -13$; б) $-7{,}8 + \boxed{\quad} = 10$;

в) $-16 + \boxed{\quad} = 0$; г) $-5{,}08 + \boxed{\quad} = -6$;

д) $113 + \boxed{\quad} = -113$; е) $-28{,}4 + \boxed{\quad} = -28{,}4$.

Задание 30. Найдите сумму чисел:

1. а) $-73 + (-28) + (-27) + 28 = -100 + 0 =$

$=$

б) $85 + 1325 + (-185) + (-1335) =$

в) $-27 + 126 + (-3) + 4 =$

г) $209 + 70 + (-1209) + (-70) =$

2\. а) $-73 + (-2,8) + (-27) + 2,8 =$

б) $8,5 + 1325 + (-18,5) + (-1335) =$

в) $100,6 + (-0,6) + (-624) + 24 =$

г) $(7,08 + (-3,2)) + (2,92 + (-6,8)) =$

д) $-21 + 126,8 + (-6,8) + (-99) + (-2,001) =$

Задание 31. Заполните пропуски:

а) $\square + \square$ \
$\square + \square$ = −9;
$\square + \square$ //

б) $\square + \square$ \
$\square + \square$ = 2,5.
$\square + \square$ //

Задание 32. Заполните «магический» квадрат.

а)

	3	−2
		−1
0	−5	2

б)

	−6	
−4	−2	0
	2	−5

Задание 33. Решите задачи.

1\. Утром температура воздуха была 12 °C, за день она повысилась на 5 °C. Какой стала температура к концу дня?

2. Вечером температура воздуха была $-12\ ^\circ C$, за ночь температура понизилась на $6\ ^\circ C$. Какой стала температура к утру?

3. Утром температура воздуха была $-20\ ^\circ C$. К обеду она повысилась на $7\ ^\circ C$. Определите температуру воздуха в полдень.

Задание 34. Выполните вычитание положительных и отрицательных чисел и сделайте проверку:

1.а) $3 - 5 = 3 + (-5) = \boxed{}$; $\boxed{} + 5 = 3$;

б) $-9 - 7 = -9 + (-7) =$

в) $18 - 42 = 18 + (-42) =$

г) $15 - (-15) =$

д) $14 - 10 =$

е) $0 - 17 =$

2.а) $3{,}7 - 5 = 3{,}7 + (-5) = \boxed{}$; $\boxed{} + 5 = 3{,}7$;

б) $-9{,}8 - 7{,}2 = -9{,}8 + (-7{,}2) =$

в) $1{,}8 - (-4{,}2) = 1{,}8 + 4{,}2 =$

г) $-5{,}9 - (-9{,}21) = -5{,}9 + 9{,}21 =$

д) $14{,}8 - 10{,}4 = 14{,}8 + (-10{,}4) =$

Заполните пропуски в утверждении:

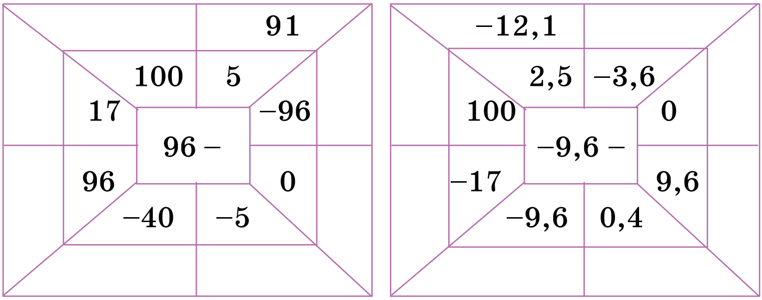
Чтобы из одного числа вычесть другое, нужно к уменьшаемому ______________ число, ________________ вычитаемому.

Всегда ли необходимо использовать это правило вычитания?

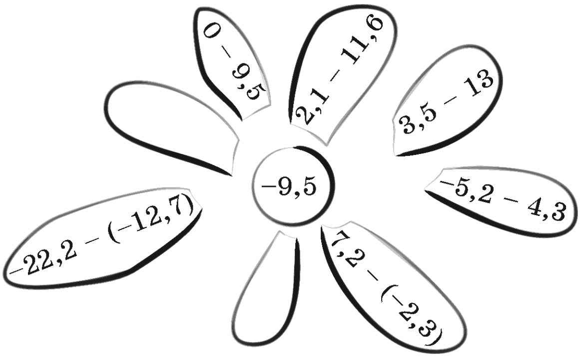
Задание 35. Найдите значение выражения:

1. а) $-13 - 4 = \square$; б) $2 - 9 = \square$;
   в) $-45 - (-38) = \square$; г) $-105 - 105 = \square$;
   д) $23 - (-74) = \square$; е) $16 - (-84) = \square$;
   ж) $65 - 65 = \square$; з) $0 - 36 = \square$.
2. а) $-13{,}9 - 4{,}6 = \square$; б) $2{,}62 - 2{,}92 = \square$;
   в) $-0{,}45 - (3{,}8) = \square$; г) $-105 - 10{,}5 = \square$;
   д) $+2{,}3 - (-7{,}4) = \square$; е) $16 - (-84) = \square$;
   ж) $6{,}5 - 6{,}05 = \square$; з) $0 - 3{,}36 = \square$.

Задание 36. Заполните по образцу:



Задание 37. «Соберите» ромашку.



1. Какой лепесток лишний?

2. Допишите в лепестки, упавшие с этой ромашки, числовые выражения.

Задание 38. Заполните пропуски:

а) $3{,}5 + \boxed{} = 2{,}1$; в) $-0{,}7 - \boxed{} = -3{,}5$;

б) $\boxed{} - 2{,}1 = -0{,}8$; г) $\boxed{} + 9 = -14{,}6$.

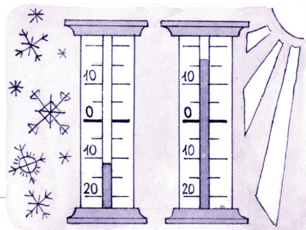
Задание 39. Решите уравнение:

а) $x - 4{,}6 = -9{,}3$; б) $-y + 2{,}92 = 0{,}3$;

в) $6{,}75 + (-x) = 4{,}6$; г) $x + (-2{,}6) = 5{,}82$;

д) $-8{,}5 - x = 5{,}1$; е) $-1{,}5 - a = -1{,}25$.

Задание 40. Решите задачи.



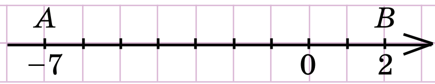
1. Вечером температура воздуха была 10 °С, за ночь она понизилась на 2 °С. Какой стала температура к утру?

2. Утром температура воздуха была −7 °С, а в полдень термометр показал −3 °С. Как изменилась температура воздуха за это время?

3. Какой была температура утром, если к вечеру она повысилась на 6 °С и стала −2 °С?

4. Утром температура воздуха была 7 °С. К обеду температура понизилась на 3 °С, а к вечеру еще понизилась на 3 °С. Какой стала температура воздуха к вечеру?

5. Найдите расстояние между точками $A(-7)$ и $B(2)$.



Составьте числовое выражение, позволяющее вычислить это расстояние.

6. Найдите длину отрезка KP, если:

а) $K\ (-33)$, $P\ (-50)$, $KP =$

б) $K\ (0)$, $P\ (158)$, $KP =$

в) $K\ (-2{,}3)$, $P\ (20{,}3)$, $KP =$

Задание 41. Заполните таблицу.

a	b	Взаимное расположение точек	Знак разности $a - b$	Неравенство
-3	-13	-13 $\quad$ -3	+	$-3 > -13$
$-10{,}5$	b	$-10{,}5$		$-10{,}5 < b$
a	-7	-7	+	
a	b	a $\quad$ b		

Задание 42. Найдите значение выражения:

а) $5{,}3 - 1{,}9 + 1 =$

б) $-11{,}7 - 13 - 2{,}4 =$

в) $-7{,}6 - (-8{,}2) + 10{,}8 =$

г) $12{,}8 - (-6{,}2) - (-81) =$

д) $-152 - 854 + 52 + 54 =$

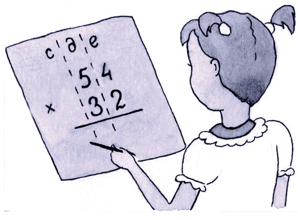
Задание 43. Найдите значение выражения:

а) $m - n + k$ при $m = -30$; $n = -82$; $k = 72$;

б) $(m + n) + (m - n)$ при $m = -21{,}6$; $n = 72{,}4$;

в) $m - n - (m - n)$ при $m = -21{,}6$; $n = 72{,}4$.

Умножение и деление положительных и отрицательных чисел



Задание 44. Выполните умножение:

1. а) $6 \cdot 3 =$ ☐; б) $-6 \cdot (-3) =$ ☐;
   в) $-8 \cdot (-9) =$ ☐; г) $102 \cdot 3 =$ ☐;
   д) $-12 \cdot 2 =$ ☐; е) $4 \cdot (-7) =$ ☐;
   ж) $-15 \cdot 1 =$ ☐; з) $0 \cdot 8 =$ ☐;
   и) $105 \cdot 0 =$ ☐; к) $-7 \cdot 0 =$ ☐.

2. а) $-6{,}5 \cdot (-3) = \square$; б) $0{,}75 \cdot 0{,}4 = \square$;
в) $-8{,}9 \cdot (-1{,}9) = \square$; г) $10{,}2 \cdot 3 = \square$;
д) $-12 \cdot 2{,}2 = \square$; е) $0{,}4 \cdot (-7{,}5) = \square$;
ж) $-14{,}9 \cdot 0{,}1 = \square$; з) $2{,}5 \cdot (-3{,}6) = \square$;
и) $0 \cdot (-8{,}9) = \square$; к) $705 \cdot 0 = \square$;
л) $0 \cdot 1 = \square$; м) $-3{,}5 \cdot 0 = \square$.

Заполните пропуски в утверждениях:

1. Произведение двух чисел одного знака имеет знак ______________ . Чтобы найти модуль произведения, надо ____________________ модули множителей.

2. Произведение двух чисел разного знака имеет знак ______________ . Чтобы найти модуль произведения надо _____________________ модули множителей.

3. Произведение двух чисел, одно из которых 0, равно ______________ .

Задание 45. Заполните таблицу, вычислив произведения.

$\otimes$	-1	$0{,}2$	$-10{,}7$	0	100
$3{,}4$					
1					
-20					
$-0{,}2$					

Задание 46. Заполните пропуски:

а) $\square \cdot 5 = -0{,}5$; д) $\square \cdot 1000{,}9 = 0$;
б) $\square \cdot (-3{,}5) = 3{,}5$; е) $a \cdot \square = -a$;
в) $7{,}4 \cdot \square = -740$; ж) $\square \cdot \square = -100$;
г) $-0{,}05 \cdot \square = 15$; з) $\square \cdot \square = 0{,}25$.

Задание 47. Найдите значение выражения:

а) $-8a$, если $a = -0{,}3$;

б) $-0{,}6m$, если $m = 45$;

в) $(a + b) \cdot (-7{,}5)$, если $a = -3$; $b = 2$;

Задание 48. Сравните значения числовых выражений:

а) $(-7{,}1) \cdot (-6{,}1) \cdot (-2)$ ◯ $7{,}4 \cdot 6{,}2 \cdot 1{,}2$;

б) $30{,}8 \cdot (-139) \cdot (-4{,}7)$ ◯ $-358 \cdot (-4{,}2) \cdot 0$;

в) $-10 \cdot 1 \cdot 10 \cdot (-1)$ ◯ $-100 \cdot 1 \cdot 100 \cdot (-1)$;

г) $-7{,}06 \cdot (-6) + (-7{,}06) \cdot 6$ ◯ $-1 \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-4)$.

Задание 49. Вычислите:

а) $2{,}5 \cdot (-4) = \square$;

б) $8 \cdot (-12{,}5) = \square$;

в) $-50 \cdot (-0{,}02) = \square$;

г) $0{,}4 \cdot (-2{,}5) \cdot 315 = \square$;

д) $-80 \cdot 15{,}6 \cdot 1{,}25 = \square$;

е) $2{,}4 \cdot (-25) \cdot (-5) = \square$.

Задание 50. Заполните пропуски:

а) $14 \cdot (-5 + 7{,}5) = 14 \cdot (-5) + \square \cdot 7{,}5 =$
$\square + \square = \square$;

б) $-8 \cdot 7{,}3 + (-8) \cdot 2{,}7 =$
$= -8 \cdot (\square + \square) = -8 \cdot \square = \square$;

в) $23{,}6 \cdot (-99) = 23{,}6 \cdot (-100 + 1) =$
$= \square + \square = \square$;

г) $-9{,}5 \cdot 7{,}5 - 9{,}5 \cdot (-27{,}5) =$
$= -9{,}5 \cdot (\square - \square) = \square$;

д) $158 \cdot 0{,}1 - 15{,}8 \cdot 10 =$

Задание 51. Заполните пропуски:

а) $2a - 3a = (2 - 3) \cdot a = \square \cdot a = \square$;

б) $17a - 4a + 10a + a =$
$= (17 - 4 + 10 + 1) \cdot \square = \square$;

в) $-a - 8{,}5a + 5{,}6a =$

$= (-\boxed{\quad} - \boxed{\quad} + \boxed{\quad}) \cdot a = \boxed{\quad}$.

г) $10{,}6 - 7{,}8a + 2{,}6a = 10{,}6 - \boxed{\quad}\,a$;

Задание 52. Приведите подобные слагаемые:

а) $6n - 3n + 7m =$

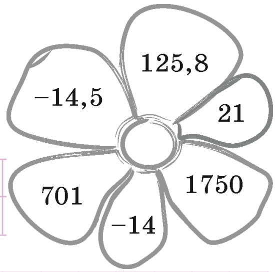
б) $-8{,}5n + 3{,}5n + 7 =$

в) $-0{,}1n - 0{,}2n - 0{,}3n - 0{,}4 =$

г) $-(3n + 5{,}6) + 0{,}6 - 2n =$

д) $-2 \cdot (4 - 0{,}2n) - 0{,}4n - 4 =$

Задание 53. Найдите значение выражения при $x = -7$ (ответ найдите на лепестках ромашки).



а) $3{,}5(x - 2) - 2{,}5x$;

б) $-20x - 13 + 2(0{,}8x + 5)$;

в) $0{,}18x \cdot (-10) - 1{,}2x$;

г) $-2 \cdot (3 - 0{,}4x) - (1{,}5 - 0{,}2x)$;

д) $37{,}2 - 14{,}8x - 36{,}2 - 85{,}2x$;

е) $125(8 - 3x) - 5(200 - 25x)$;

Составьте выражение, значение которого при $x = -7$ равно $-0{,}7$.

Задание 54. Выполните деление:

а) $120 : 4 =$ ☐; б) $1{,}2 : (-4) =$ ☐;
в) $-12 : 40 =$ ☐; г) $-0{,}12 : (-0{,}4) =$ ☐;
д) $-0{,}12 : 40 =$ ☐; е) $-12 : (-0{,}04) =$ ☐.

Заполните пропуски в утверждениях:

1. Частное двух чисел одного знака имеет знак ________________________. Чтобы найти модуль частного, надо модуль делимого __________________ на модуль делителя.

2. Частное двух чисел разного знака имеет знак ________________________. Чтобы найти модуль частного, надо ____ ______________________.

Задание 55. Заполните таблицу.

m	-3	-2	-1	0	1	3
$-6 : m$						
$\dfrac{2m+1}{1+m}$						
$\dfrac{-m-2}{m+1}$						

В каких случаях не удалось найти значение выражения?

Задание 56. Сравните значения выражений:

а) $-12{,}78 \cdot 103{,}5$ ◯ $-12{,}78 : (-103{,}5)$;
б) $17{,}2 : 0{,}4$ ◯ $-17{,}2 : (-0{,}4)$;
в) $-708 \cdot (-0{,}3)$ ◯ $-708 : (-0{,}3)$;
г) $-33{,}9 \cdot 0$ ◯ $0 : (-33{,}9)$.

Задание 57. Решите уравнение:

а) $10x = -1$;

б) $10 + x = -4$;

в) $3(x + 2{,}3) = -6$;

г) $x : (-2{,}3) = 0{,}1$;

д) $-12{,}4 : x = -31$;

е) $(3 - x) \cdot (x + 5) = 0$;

ж) $-5 \cdot (-0{,}2x - 10) = 5$;

з) $0 : (x + 7) = 7$.

Какое уравнение не имеет корней?

Задание 58. Найдите среднее арифметическое чисел

$-10{,}6$; $-12{,}4$; $-8{,}7$; $-7{,}8$; -6.

Ответ:

Задание 59. Найдите координату середины C отрезка AB, если:

а) $A\ (-11)$; $B\ (-15)$;

$C(\quad)$;

б) $A\ (5{,}6)$; $B\ (-23{,}8)$;

$C(\quad)$;

в) $A\ (-0{,}7)$; $B\ (0{,}1)$;

$C(\quad)$;

г) $A\ (m)$; $B\ (n)$;

$C(\quad)$.

Задание 60. Найдите среднюю дневную температуру за неделю:

Понедельник	−7 °C
Вторник	−6 °C
Среда	−8 °C
Четверг	−12 °C
Пятница	−15 °C
Суббота	−10 °C
Воскресенье	−5 °C

Ответ:

Задание 61. Выполните действия:

а) $-3{,}75 + 10{,}5 : (0{,}8 \cdot 1{,}25 + 2{,}5) =$

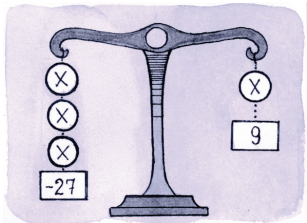
б) $-128 - 6{,}4 \cdot (-0{,}42 : 0{,}02 + 1) =$

Задание 62. Найдите значение выражения:

а) $-4{,}2n + 3{,}7n + 5{,}2$ при $n = 10$;

б) $\dfrac{-3{,}01a + 7b}{d}$ при $a = 2$; $b = -1$; $d = 13{,}02$.

Решение уравнений



Задание 63. Заполните пропуски в решении уравнения:

а) $3{,}5x - 7 = 3{,}5$;

$3{,}5x = \boxed{} + 3{,}5$;

$3{,}5x = \boxed{}$;

$x = \boxed{} : 3{,}5$;

$x = 3$;

б) $2 \cdot (x + 0{,}1) = -10x + 2$;

$2x + \boxed{} = -10x + 2$;

$2x \bigcirc 10x = 2 - \boxed{}$;

$\boxed{} \cdot x = \boxed{}$;

$x = \boxed{} : \boxed{}$;

$x = 0{,}15$;

в) $-0{,}4(x + 2) - 8(x - 1) = 15{,}6$;

$-0{,}4x - \boxed{} - 8x \bigcirc 8 = 15{,}6$;

$-0{,}4x - 8x = 0{,}8 - \boxed{} + 15{,}6$;

$-8{,}4x = \boxed{}$;

$x = \boxed{} : (-8{,}4)$;

$x = -1$;

г) $3(x + 4) = 3x - 2{,}4;$

$3x + \boxed{} = 3x - 2{,}4;$

$3x \bigcirc 3x = \boxed{} - 2{,}4;$

$\boxed{}\,x = \boxed{};$

$x = \boxed{}.$

Ответ: нет корней.

Задание 64. Решите уравнения. Ответы найдите среди следующих чисел: 4,04; 0; –1; 0,88; –3,6; 4; 0,62.

а) $0{,}3(6 - 2x) = -0{,}6;$

б) $7x - (2{,}4x + 12) = -17{,}6 - x;$

в) $1{,}8(5a - 5) = -4{,}5 \cdot 2;$

г) $-3k + 10{,}1 = 2k - 10{,}1;$

д) $0{,}15m - 1{,}5\,m - 0{,}65m = 7{,}2;$

е) $2(x - 0{,}95) = -1{,}5(2x - 0{,}8)$;

ж) $-25 = (3n + 0{,}64)12{,}5$.

Составьте уравнение, корнем которого является число -2.

Задание 65. Решите задачу с помощью уравнения.

1. Если из числа вычесть 7, полученную разность умножить на (-3), то получится (-21). Найдите это число.

2. Какое число в сумме с утроенным данным числом дает 80?

3. Задумано число. Вычтите его из 12, результат умножьте на 5, и получится 24. Какое число задумано?

4. Составьте задачу, если для ее решения было составлено уравнение $(2x + 20) \cdot 2 - 3 = 5$.

Проверьте себя

(отметьте ☒ верный ответ)

1. Выполните сложение: $2{,}3 + (-7{,}4)$.

$5{,}1$	$-9{,}7$	$-5{,}1$
☐	☐	☐

2. Выполните вычитание: $-2{,}3 - (-7{,}4)$.

$5{,}1$	$9{,}7$	$-9{,}7$
☐	☐	☐

3. Найдите сумму всех таких целых чисел k, что

$$-17 < k < 14.$$

-48	-45	-31
☐	☐	☐

4. Решите уравнение: $|x + 2| = 5$

5 и -5	3 и -7	-7 и 5
☐	☐	☐

5. Выполните умножение: $-2{,}17 \cdot (-1{,}5)$.

$-3{,}255$	$32{,}55$	$3{,}255$
☐	☐	☐

6. Выполните деление: $-7{,}112 : (-5{,}6)$.

$12{,}7$	$-1{,}27$	$1{,}27$
☐	☐	☐

7. Выполните действия: $-2{,}5 \cdot (-1{,}6) + 41{,}6 : (-4)$.

$-0{,}64$	$-6{,}4$	$-14{,}4$
☐	☐	☐

8. Найдите значение выражения $2m - 1{,}3$ при $m = -1{,}3$.

$0{,}39$	$-2{,}99$	$-3{,}9$
☐	☐	☐

9. Решите уравнение: $(-x + 3) \cdot (x + 4) = 0$.

-3 и -4	3 и -4	-3 и 4
☐	☐	☐

10. Упростите выражение:

$$5a - (6a + 7{,}4) + 2{,}5a - 2{,}6.$$

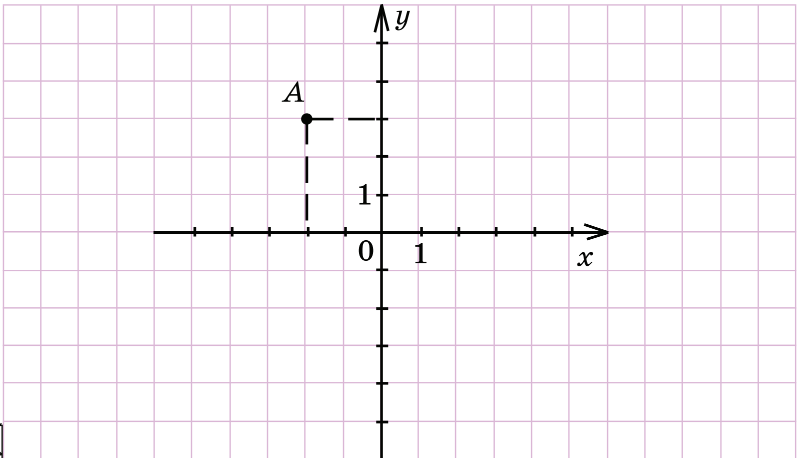
$13{,}5a$	$3{,}5a$	$1{,}5a - 10$
☐	☐	☐

11. Решите уравнение:

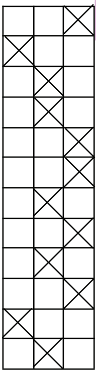
$$5(4 - 3x) = 1{,}3 + 4 \cdot (7 - 4x).$$

$9{,}3$	$-6{,}7$	$0{,}3$
☐	☐	☐

12. Запишите координаты точки A.

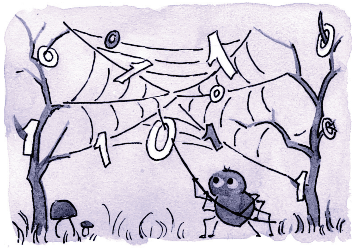


$(3; -2)$	$(-2; 3)$	$(2; 3)$
☐	☐	☐



Раздел II

НАЙДИТЕ СВЯЗИ И ЗАКОНОМЕРНОСТИ В ДЕЙСТВИЯХ НАД ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ И НУЛЁМ



Нуль и единица

Задание 66. 1. Заполните пропуски:

$2{,}5 + \square < 0;$ $\qquad -374 + \square = 0;$

$2{,}5 \cdot \square < 0;$ $\qquad -374 - \square = 0;$

$2{,}5 : \square < 0;$ $\qquad \square \cdot (-374) = 0;$

$2{,}5 - \square < 0;$ $\qquad \square : (-374) = 0.$

2. Составьте примеры по схеме

$$\square * \square > \square,$$

где * – любое арифметическое действие.

3. Сформулируйте выводы о том, в каких случаях результат действия меньше нуля (равен нулю, больше нуля). Например: «Произведение двух чисел меньше нуля, *если*

Задание 67. 1. Заполните пропуски:

а) $1973 + \square = 1;$ $\qquad -19{,}73 + \square = 1;$

$1973 - \square = 1;$ $\qquad -19{,}73 - \square = 1;$

$1973 : \square = 1;$ $\qquad -19{,}73 : \square = 1.$

2. Заполните пропуски, если возможно:

$1000 \cdot \square = 1;$

$1973 \cdot \square = 1;$

$-19{,}73 \cdot \square = 1.$

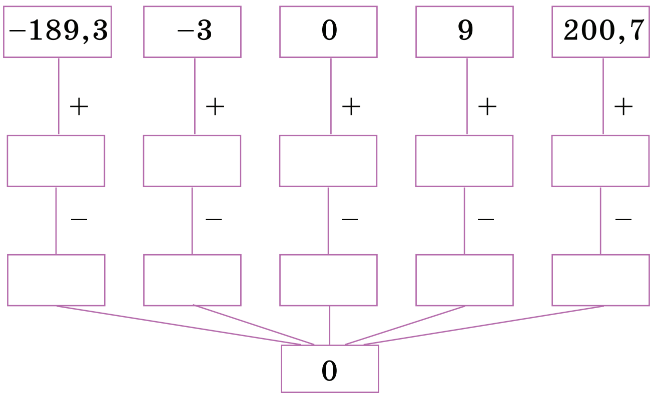
3. Составьте аналогичные равенства по схеме

$$\square * \square = -1,$$

где * — любое арифметическое действие.

4. Сделайте выводы.

Задание 68. 1. Заполните пропуски:



2. Составьте аналогичное задание, используя другие действия.

Задание 69. 1. Заполните пропуски:

$-4{,}975 + \boxed{} = -4{,}975;$

$-4{,}975 - \boxed{} = -4{,}975;$

$-4{,}975 \cdot \boxed{} = -4{,}975;$

$-4{,}975 : \boxed{} = -4{,}975.$

2. Составьте четыре примера по схеме:

$$-\overline{abcd} * \boxed{} = \overline{abcd},$$

где * – любое арифметическое действие.

3. Сделайте выводы о том, может ли результат действия быть равным другому компоненту действия.

Задание 70. Отрицательные числа раньше изучались в курсе алгебры учениками гораздо старше вас. Перед вами фрагмент учебника известного педагога К.Ф. Лебединцева «Курс алгебры», изданного в 1910 году.

§ 9. Понятіе объ отрицательныхъ числахъ

1) Городъ Тверь находится на Николаевской желѣзной дорогѣ между Москвой и Петербургомъ. Служебный поѣздъ вышелъ изъ Твери по направленію къ Москвѣ и прошелъ a верстъ, затѣмъ вернулся назадъ на b верстъ. Въ скольких верстахъ и въ какую сторону отъ Твери онъ находится?

Очевидно, что когда $a > b$, то задача рѣшается по формулѣ $x = a - b$ и поѣздъ стоитъ по направленію къ Москвѣ; если $a < b$, то поѣздъ отошелъ по направленію къ Петербургу на такое число верстъ, которое опредѣлится по формулѣ $x = b - a$.

Если же мы желаемъ, чтобы задача рѣшалась всегда по формулѣ $x = a - b$, то условимся обозначать направленіе къ Москвѣ знакомъ $+$, а направленіе къ Петербургу знакомъ $-$; напр., при $a = 38$, $b = 11$, имѣемъ $x = 38 - 11 = +27$, а при $a = 16$, $b = 21$ получимъ $x = 16 - 21 = -5$, т. е. поѣздъ въ этомъ случаѣ стоитъ въ 5 верстахъ отъ Твери, считая разстояніе въ сторону Петербурга.

2) Термометръ показываетъ въ полдень a градусовъ тепла (т. е. выше нуля); къ вечеру онъ спустился на b градусовъ внизъ. Что показываетъ онъ къ вечеру?

Очевидно, что если $a > b$, то термометръ стоитъ еще выше нуля, и задача рѣшается по формулѣ $x = a - b$; если мы желаемъ, чтобы эта формула давала рѣшеніе задачи и при условіи $a < b$, нужно условиться градусы тепла выражать числами со знакомъ $+$ впереди, а градусы холода числами со знакомъ $-$; тогда, напр., при $a = 16$, $b = 5$ имѣемъ $x = 16 - 5 = +11$, а при $a = 3$, $b = 8$ найдемъ $x = 3 - 8 = -5$, т. е. термометръ показываетъ въ первомъ случаѣ 11 градусовъ тепла, а во второмъ 5 градусовъ холода.

Иногда вопросъ задачи, какъ это было въ первой задачѣ съ гребцомъ и лодкой, оказывается слишкомъ узкимъ сравнительно съ ея усло-

---

*) Замѣтимъ, что мы могли бы условиться приписывать знакамъ $+$ и $-$ и обратное значеніе, т. е. считать знакъ $+$ равносильнымъ слову „влѣво", а знакъ $-$ замѣняющимъ слово „вправо". Тогда задача рѣшалась бы всегда по формулѣ $x = b - a$; напр., при $a = 25$, $b = 3$ имѣемъ $x = 3 - 25 = -22$ (22 саж. вправо по нашему условію), при $a = 18$, $b = 45$ получимъ $x = 45 - 18 = +27$ (27 саж. влѣво) и т. д.

віемъ; въ такомъ случаѣ нужно придать ему такую форму, чтобы онъ соотвѣтствовалъ задачѣ при всякихъ значеніяхъ буквъ, входящихъ въ ея условіе. Вотъ примѣры:

3) Мои часы ушли впередъ отъ вѣрныхъ часовъ на a минутъ, я перевелъ ихъ назадъ на b минутъ; на сколько минутъ они теперь впереди вѣрныхъ часовъ?

Очевидно, задача рѣшается по формулѣ $x = a - b$; но легко также видѣть, что вопросъ ея соотвѣтствуетъ условію только тогда, когда $a > b$, а чтобы распространить найденную формулу на всѣ значенія a и b, нужно выразить вопросъ задачи такъ: *спѣшатъ ли теперь мои часы или отстаютъ, и на сколько минутъ?*, а затѣмъ нужно условиться сопровождать знакомъ $+$ то число минутъ, на которое часы спѣшатъ, и знакомъ $-$ то число минутъ, на которое они отстаютъ; тогда, напр., при $a = 10$, $b = 8$ имѣемъ $x = 10 - 8 = +2$, а при $a = 12$, $b = 15$ найдемъ $x = 12 - 15 = -3$, т. е. часы въ первомъ случаѣ еще впереди на 2 минуты, а во второмъ отстаютъ на 3 минуты.

4) Игрокъ въ первую партію выигралъ a рублей, а во вторую проигралъ b рублей. Какъ великъ его общій выигрышъ?

Игрокъ останется въ выигрышѣ, если $a > b$, и задача рѣшается по формулѣ $x = a - b$; чтобы распространить эту формулу на случаи, когда $a < b$, мы должны прежде всего расширить смыслъ вопроса задачи и изложить его, напр., такъ: *съ какимъ результатомъ для себя игрокъ кончилъ игру?* Затѣмъ, условимся выигрышъ обозначать знакомъ $+$, а проигрышъ знакомъ $-$, и, напр., при $a = 30$, $b = 12$ имѣемъ $x = 30 - 12 = +18$, а если $a = 24$, $b = 32$, то $x = 24 - 32 = -8$, т. е. въ первомъ случаѣ игрокъ выигралъ всего 18 руб., а во второмъ проигралъ 8 рублей.

5) Игрокъ въ первую партію выигралъ a руб., а во вторую проигралъ b руб. Какъ великъ его общій проигрышъ?

Эта задача отличается отъ предыдущей только вопросомъ; рѣшается она, очевидно, по формулѣ $x = b - a$, и вопросъ ея соотвѣтствуетъ условію только при $a < b$; если же мы желаемъ распространить эту формулу на всякія значенія a и b, то условимся проигрышъ обозначать знакомъ $+$, выигрышъ знакомъ $-$, а вопросъ изложимъ такъ: *съ какимъ результатомъ для себя игрокъ кончилъ игру?* Тогда, напр., при $a = 16$, $b = 19$ получимъ $x = 19 - 16 = +3$, а при $a = 11$, $b = 7$ будемъ имѣть $x = 7 - 11 = -4$, т. е. игрокъ въ послѣднемъ случаѣ послѣ двухъ игръ имѣетъ 4 рубля выигрыша, какъ оно и слѣдуетъ по смыслу условія.

Изъ всѣхъ этихъ примѣровъ мы можемъ сдѣлать такіе выводы:

Если намъ дано алгебраическое выраженіе, представляющее разность, напр., $a - b$, то его числовая величина можетъ быть найдена при всякихъ значеніяхъ входящихъ въ него буквъ, если мы условимся въ слѣдующемъ: въ тѣхъ случаяхъ, когда $a > b$, разность находится по правиламъ ариѳметики и сопровождается знакомъ $+$ впереди или же пишется вовсе безъ знака; если же $a < b$, т. е., если уменьшаемое меньше вычитаемаго, то мы узнаемъ по правиламъ ариѳметики, на сколько именно уменьшаемое меньше вычитаемаго, пишемъ полученное число со знакомъ $-$ впереди и называемъ этотъ результатъ разностью данныхъ чиселъ.

Числа, сопровождаемыя знакомъ $+$ впереди, явнымъ или подразумѣваемымъ, будемъ называть **положительными**, а числа, сопровождаемыя знакомъ $-$ впереди, **отрицательными**.

Отрицательное число въ задачѣ обозначаетъ, какъ видно изъ предыдущаго, величину, противоположную *) той, которая выражается соотвѣтственнымъ положительнымъ числомъ; если, напр., положительное число обозначаетъ прибыль, то отрицательное—убытокъ, если положительное число выражаетъ приростъ населенія въ городѣ, то отрицательное—уменьшеніе населенія; если положительное число выражаетъ столько то единицъ времени послѣ настоящаго момента, то отрицательное—столько то единицъ времени до настоящаго момента; если положительное число выражаетъ капиталъ, принадлежащій данному лицу, то отрицательное—долгъ этого же лица; если положительное число выражаетъ долгъ, то отрицательное—капиталъ того же лица и т. д.

Отсюда слѣдуетъ еще и такое важное заключеніе. Не во всякой задачѣ возможенъ отрицательный отвѣтъ, такъ какъ не всякая величина имѣетъ соотвѣтствующую противоположную. Вотъ, напр., задача:

a учениковъ играли въ мячъ; потомъ b учениковъ бросили играть; сколько учениковъ продолжало игру?

Искомое число учениковъ $x = a - b$; но легко видѣть, что здѣсь задача при $a < b$ теряетъ смыслъ, такъ какъ, напр., если играло 5 учениковъ, то изъ нихъ не могли уйти 8, и значеніе x для даннаго случая ($x = 5 - 8 = -3$) не имѣетъ смысла.

Или вотъ еще такая задача: *длина прямоугольнаго поля a саженъ, ширина на b саженъ меньше; опредѣлить ширину.*

Искомая ширина $x = a - b$; но если, напр., $a = 30$, $b = 40$, то отвѣтъ $x = 30 - 40 = -10$ не имѣетъ смысла, такъ какъ значенія длины и ширины различаются другъ отъ друга только по числу единицъ, а не по направленію.

Въ свое время мы видѣли въ ариѳметикѣ, вводя дробныя числа, что однѣ величины могутъ выражаться какъ цѣлыми, такъ и дробными

---

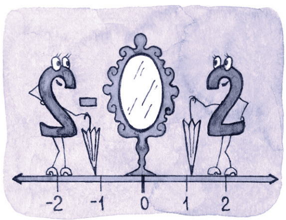
*) Мы будемъ называть двѣ величины **противоположными** другъ другу, если онѣ могутъ быть разсматриваемы—одна, какъ увеличеніе, а другая, какъ уменьшеніе одной и той же третьей величины на нѣсколько единицъ (или долей единицы); напр., выигрышъ обозначаетъ увеличеніе капитала игрока на нѣсколько единицъ (или долей единицы), а проигрышъ—уменьшеніе того же капитала; движеніе вправо гребца, уже отъѣхавшаго вправо отъ пристани, равносильно увеличенію его разстоянія отъ пристани, движеніе влѣво при тѣхъ же условіяхъ равносильно уменьшенію того же разстоянія и т. д.

числами (напр., длина, промежутокъ времени, стоимость и т. д.), а другія—только цѣлыми (число людей, число выстрѣловъ, качаній маятника и т. д.); поэтому и въ алгебрѣ, вводя отрицательныя числа, мы обратимъ вниманіе на то, что однѣ величины могутъ выражаться положительными и отрицательными числами: разстояніе, различаемое по двумъ противоположнымъ направленіямъ (вправо, влѣво), результатъ игры для игрока (выигрышъ, проигрышъ), результатъ торговли для купца (прибыль, убытокъ), а другія—только положительными: число учениковъ, длина или ширина поля и т. д., и потому употребленіе отрицательныхъ чиселъ въ формулахъ возможно только тогда, когда изслѣдуемая нами величина можетъ имѣть противоположную, а иначе формула теряетъ смыслъ.

1. Разбейте этот текст на несколько частей. Каждой части дайте название так, чтобы легко можно было вспомнить или узнать содержание этого довольно большого текста.

2. Выберите себе Роль (ученик, старший брат или сестра, директор школы, натуральные числа и т. д.) и в этой роли напишите или изобразите для кого-то (то есть Адресатом может быть одноклассник, младший брат или сестра, учителя и ученики вашей школы, другие числа и т. д.) в любой Форме, например, краткого рассказа или схемы, комикса, приказа директора, жалобы и благодарности одних чисел другим и т. п. на Тему «Что такое отрицательные числа».

Этот прием так и называется РАФТ:
Роль,
Адресат,
Форма,
Тема.



Противоположные числа

Задание 71. 1. Заполните пропуски:

а) $74{,}48 + (-77{,}48) = \boxed{}$;
$-503{,}7 + 503{,}7 = \boxed{}$;
$0{,}092 - (-0{,}092) = \boxed{}$;
$-37{,}9 - 37{,}9 = \boxed{}$;
$25 \cdot (-25) = \boxed{}$;
$(-0{,}02) \cdot 0{,}02 = \boxed{}$;
$-467{,}3 : 467{,}3 = \boxed{}$;

б) $a + (-a) = \boxed{}$;
$a - (-a) = \boxed{}$;
$a : (-a) = \boxed{}$ $(a \neq 0)$;
$a \cdot (-a) = \boxed{}$.

2. Сформулируйте правила действий для противоположных чисел.

Задание 72. 1. Вставьте пропущенные множители:

$\boxed{} \cdot 14{,}407 = -14{,}407;$

$-1 \cdot \boxed{} = 292{,}5;$

$\boxed{} \cdot (-1) = -0{,}043;$

$\boxed{} \cdot 1 = -1;$

$\boxed{} \cdot a = -a;$

$\boxed{} \cdot (-x) = x.$

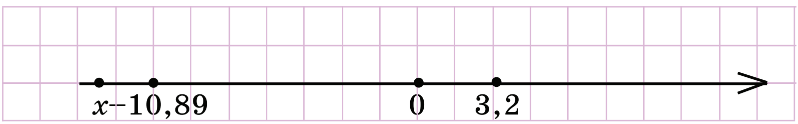
2. Отметьте на числовой прямой числа

$a = -1 \cdot 3{,}2;$

$b = -1 \cdot (-10{,}89);$

$c = -1 \cdot 0;$

$d = -1 \cdot x:$



3. Продолжите утверждения.

«Чтобы умножить число на (−1), достаточно ____.»

«Произведением любого числа и числа (−1) является число, ______________________ *данному числу».*

Задание 73. 1. Соедините пары противоположных чисел:

a	$-86{,}007 - 197{,}47$
$-197{,}47 + 86{,}007$	$-a$
$-197{,}47 + 86{,}007$	$197{,}47 - 86{,}007$
$197{,}47 \cdot (-86{,}007)$	$-197{,}47 \cdot 86{,}007$
$-197{,}47 : (-86{,}007)$	$197{,}07 \cdot 86{,}007$
$a \cdot b$	$b - a$
$-197{,}47 - (-86{,}007)$	$-a \cdot (-b)$
$a - b$	$a + b$

2. Составьте аналогичное задание.

Задание 74. Где можно, поставьте знаки $<$; $>$; $=$:

а) $-2 \quad -(-2)$;

б) $-(-3) \quad |-3|$;

в) $0 \quad |-8|$;

г) $-1 \quad |-0{,}1|$;

д) $a \quad -a$;

е) $-a \quad |a|$;

ж) $0 \quad |-a|$;

з) $-1 \quad |a|$.

Задание 74. 1. Вставьте знаки $<$; $>$; $=$:

$|5 - 4| \quad |5| - |4|$;

$|4 - 5| \quad |4| - |5|$;

$|-5 - 4| \quad |-5| - |4|$;

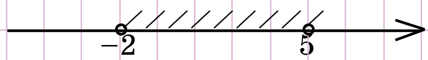
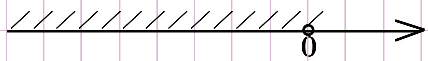
$|5 - (-4)| \quad |5| - |-4|$;

$|-5 - (-4)| \quad |-5| - |-4|$.

2. Сформулируйте вывод относительно модуля разности двух чисел и разности модулей этих чисел.

Координатная прямая
Координатная плоскость

Задание 75. 1. Заполните пропуски в таблице.

<table>
<tr><td>$x > -2$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$x < 5$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td>$-10 < x < -0,5$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td>$|x| < 3$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>
</td></tr>
</table>

2. Запишите пять чисел, расположенных между числами -2 и -5 на координатной прямой:

Запишите пять чисел, расположенных между числами -2 и -3 на координатной прямой:

Сколько целых и сколько дробных чисел находятся между числами -3 и 3 на координатной прямой?

Задание 76. 1. Вставьте подходящую цифру или число:

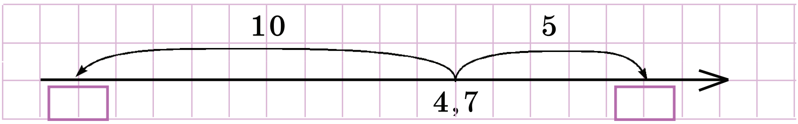
$$\square < -1{,}7 < \square;$$
$$-1{,}\square < -1{,}7 < -1{,}\square;$$
$$-1{,}7\square \le -1{,}7 \le -1{,}7\square.$$

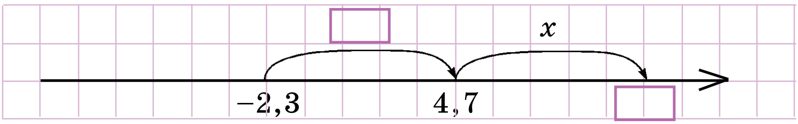
2. Вставьте пропущенное число:

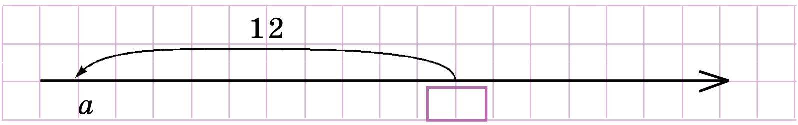
$$-110 < \square < -109;$$
$$-17{,}709 < \square < -17{,}71.$$

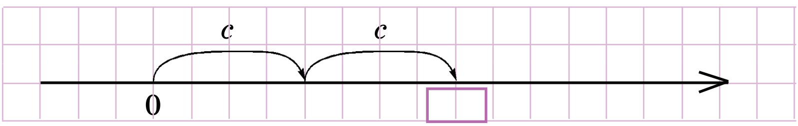
Сколько таких чисел? Изобразите их.

Задание 77. 1. Заполните пропуски.









2. Составьте аналогичное задание.

Задание 78. 1. Установите соответствие:

$x - 2 > 0$	$x < 2$
$x - 2 < 0$	$-17 < -8$
$a - b > 0$	$x > 2$
$b - a > 0$	$c > d$
$c - d > 0$	$a > b$
$-17 - (-8) < 0$	$a < b$

2. Отметьте на числовой прямой числа, удовлетворяющие неравенствам:

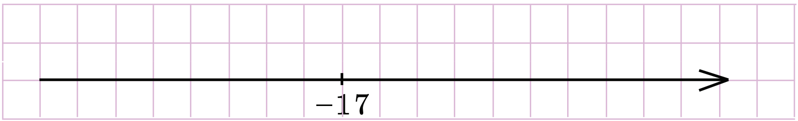
$b - x > 0$;

$-17 - x < 0$;

$a - b < 0$;

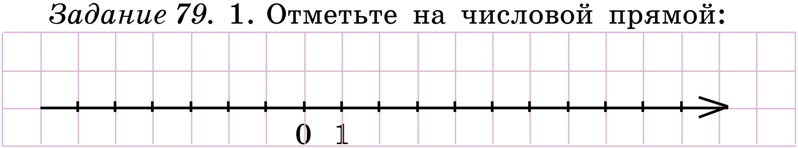
$-17 - a > 0$;

$b > 0$.



3. Составьте аналогичное задание.

Задание 79. 1. Отметьте на числовой прямой:



а) число $x + y$, если $7 - x = y$;

б) число $a - b$, если $a + 3 = b$;

в) число $b - a$, если $a - 4 = b$;

г) число $c : d$ $(d \neq 0)$, если $2d = c$.

Сколько таких чисел?

2. Составьте аналогичное задание.

Задание 80. 1. Заполните пропуски:

Если A (2007), B (−12000), то AB = $\boxed{}$;

Если A (−3), B (−18), то AB = $\boxed{}$;

Если A (−3), B (12), то AB = $\boxed{}$;

Если A (−3), B ($\boxed{}$), то AB = 25;

Если A ($\boxed{}$), B ($\boxed{}$), то AB = 25;

Если A (a), B (a − 13), то AB = $\boxed{}$;

Если A (−a), B (a), то AB = $\boxed{}$;

Если A (x + 3), B ($\boxed{}$), то AB = 10.

В каких случаях возможны два варианта заполнения пропусков, а в каких вариантов бесконечно много?

2. Составьте свое задание о связи координат точек и расстояний между ними.

Задание 81. В учебнике «Математика. 6 класс» (2006 г.) его авторы Т. К. Муравина, О. В. Муравин так объясняют, что такое координаты и где они используются:

Координаты

Место точки на координатной прямой определяется координатой этой точки. Нужный дом на улице можно найти по его номеру. Однако, если ваши друзья живут в многоквартирном доме, то для визита к ним, кроме номера дома, нужно знать еще и номер квартиры.

В квадрате 10×10 клеток игры «Морской бой» изображаются корабли: один четырехклеточный, два трехклеточных, три двухклеточных и четыре одноклеточных. При этом между любыми двумя соседними кораблями должен оставаться промежуток не меньше одной клетки. На рисунке 126 показан один из возможных вариантов расположения кораблей.

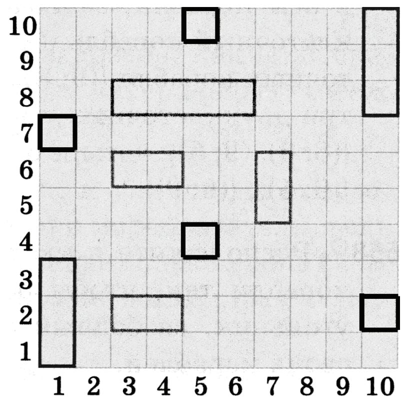


Рис. 126

Каждая клеточка квадрата обозначается парой чисел, стоящих вдоль нижней и левой сторон квадрата. Отсчет чисел начинается от левого нижнего угла квадрата.

Числа, с помощью которых указывают, где находится некоторый объект, называют его *координатами*.

Термин координаты происходит от двух латинских слов *ко* — «совместно» и *оридинатус* — «определенный».

В игре «Морской бой» при обозначении положения клетки первой указывают горизонтальную ее координату, а второй — вертикальную.

Принцип определения положения клетки в игре «Морской бой» использован и при построении таблицы квадратов натуральных чисел от 1 до 99. Так, например, квадрат числа 67 записан в клетке, стоящей на пересечении строки 60 и столбца 7, — это число 4489.

Первыми потребность в координатах и умении их определять ощутили путешественники, особенно мореплаватели, ведь в море не у кого спросить дорогу, а плаванье только вдоль берегов существенно ограничивало разнообразие возможных маршрутов.

Рис. 127

На рисунке 127 изображен глобус — модель земного шара. На нем по изображениям океанов, морей, материков и островов проходит сеть линий, каждая из которых является окружностью. Одни окружности проходят через Северный и Южный полюсы — их называют ***меридианами.*** Другие окружности пересекают меридианы под прямыми углами, постепенно уменьшаясь при приближении к полюсам — это ***параллели.*** Самая большая из параллелей, как бы опоясывающая земной шар, называется ***экватором.***

Через любую точку глобуса можно провести параллель и меридиан. Чтобы указать координаты точки земного шара, нужно знать, как параллели и меридианы определяются и обозначаются. Отсчет параллелей ведут от экватора по направлениям к Северному или Южному полюсам Земли. Меридианы отсчитывают от начального, *нулевого меридиана*, проходящего через маленький английский городок Гринвич, расположенный на берегу реки Темзы в пригороде Лондона. Этот меридиан так и называется Гринвичский. Небольшая часть нулевого меридиана (рис. 128) проведена по мостовой Гринвича. От него меридианы отсчитываются на восток и на запад. При этом углы с вершиной в центре Земли измеряют градусах (рис. 129).

Получающиеся координаты называют соответственно широтой и долготой. Москва, например, имеет такие координаты: 37° восточной долготы и 56,5° северной ши-

Рис. 128

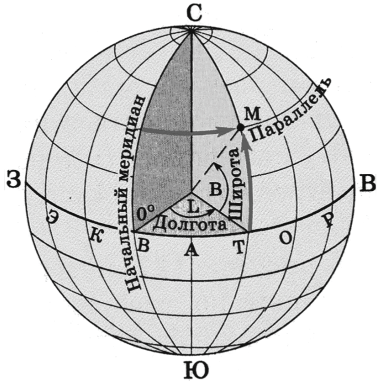


Рис. 129

роты — Москва находится к востоку от Гринвича и к северу от экватора.

В знаменитом романе Жюля Верна «Дети капитана Гранта» герои в поисках капитана Гранта совершают увлекательное и опасное путешествие вдоль всей 37-й параллели южной широты. На карте (рис. 130) 37-я параллель пересекает Южную Америку.

Обратите внимание на то, как Жюль Верн задал масштаб карты.

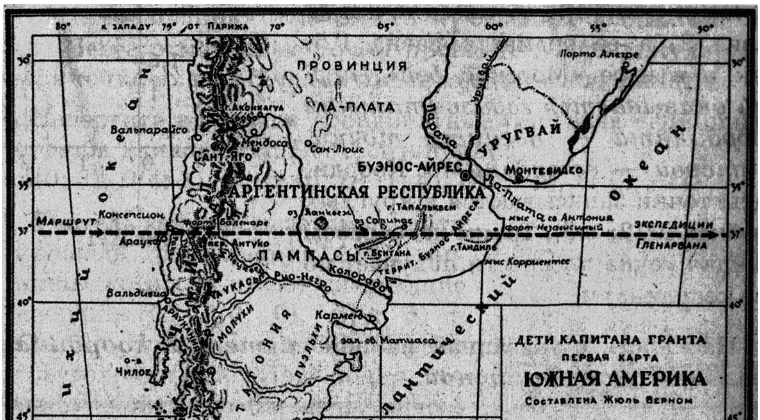


Рис. 130

Координаты, с которыми вы уже познакомились на уроках математики, — координаты точек на прямой. Выбрав на любой прямой начало отсчета, единичный отрезок и положительное направление, мы превращаем эту прямую в координатную. Каждой ее точке соответствует свое число — координата.

Для определения положения точки на плоскости нужны два числа. Поэтому на *плоскости* проводят две взаимно перпендикулярные координатные прямые: горизонтальную и вертикальную с общим началом (рис. 131).

Из любой точки М плоскости к координатным прямым можно провести перпендикуляры и определить координаты точек их пересечения с координатными прямыми.

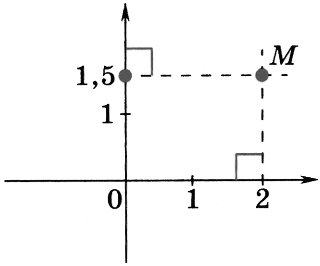
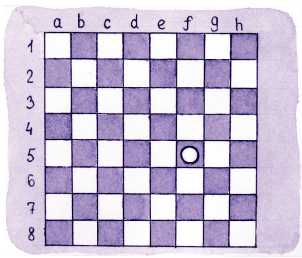


Рис. 131

Координату точки на горизонтальной координатной прямой называют ***абсциссой,*** на вертикальной — ***ординатой.*** Горизонтальную координатную прямую называют ***осью абсцисс,*** вертикальную прямую — ***осью ординат.***

На рисунке 131 абсцисса точки М равна 2, а ее ордината равна 1,5. Как и в игре «Морской бой», *первой указывается горизонтальная координата — абсцисса точки, а второй — ее ордината.* Координаты точки записываются в круглых скобках М (2; 1,5). Таким же образом каждая точка плоскости получает по две координаты.

Плоскость с указанной на ней системой координат называют *координатной*.



1. Проанализируйте текст, рассмотрите иллюстрации. Попробуйте полученную из текста информацию представить схематично, в виде кластера, составление которого уже начато на следующей странице.

2. Дополните кластер своими знаниями, например, координаты используют при игре в шахматы, в концертном зале...

Задание 82. Можно ли играть в «Морской бой», используя положительные и отрицательные числа? Если да, опишите правила такого варианта игры.

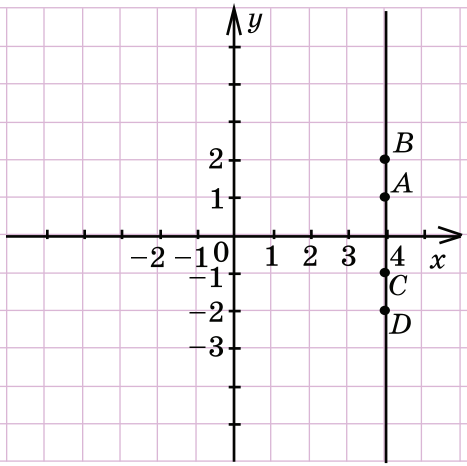
Задание 83. 1. Приведите примеры точек, абсцисса которых равна нулю.

Где расположены на координатной плоскости все такие точки?

2. Приведите примеры точек, абсцисса которых число −2.

Где расположены такие точки на координатной плоскости?

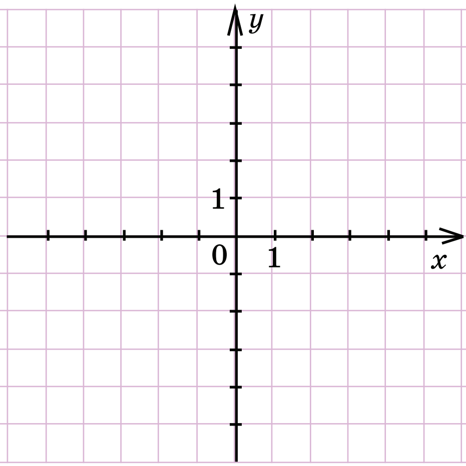
3. Что общего и чем отличаются координаты точек, расположенных на прямой AD?



4. Могут ли быть равными числами абсцисса и ордината одной точки? Приведите примеры.

Как располагаются на координатной плоскости такие точки?

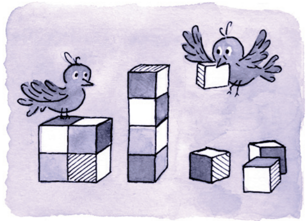
5. Отметьте на координатной плоскости точки, координаты которых отрицательны.



Сколько таких точек?

6. Составьте аналогичные задания.

Изменение суммы, разности, произведения, частного



Задание 84. 1. Продолжите заполнение таблицы, сформулировав правило знаков для действия умножения.

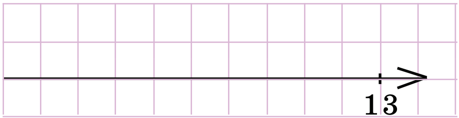
$\times$	положит.	нуль	отрицат.
положит.	положит.		
нуль		нуль	
отрицат.			полож.

2. Составьте аналогичные таблицы и правила для действий сложения, вычитания, деления.

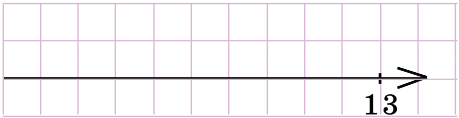
Задание 85. 1. Заполните пропуски и изобразите действия на координатной прямой

$13 + \square = 10$

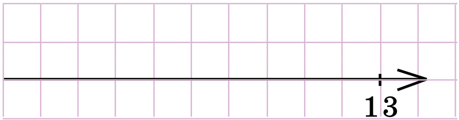
$13 + \square = 1$



$13 + \square = -0{,}001$

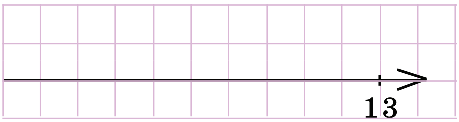


$\square + 13 = -2$



$\square + 13 = 0$

$\square + 13 = -1013$



2. Составьте аналогичное задание с числом −13.

3. Продолжите фразу:

«Сумма будет меньше одного из слагаемых, если второе слагаемое ________________________________».

Задание 86. 1. Заполните пропуски:

$(-8) - \square = 122$; $(-8) - \square = 2$;

$(-8) - \square = 0{,}2$; $(-8) - \square = -0{,}02$;

$(-8) - \boxed{} = -2$; $(-8) - \boxed{} = -8$;
$(-8) - \boxed{} = -222$.

2. Какое из этих утверждений является верным?

а) «Разность двух чисел может быть больше уменьшаемого»;

б) «Разность двух чисел может быть меньше уменьшаемого»;

в) «Разность двух чисел может быть равной уменьшаемому».

3. Составьте аналогичное задание для суммы двух чисел.

Задание 87. 1. Заполните пропуски и продолжите равенства:

$(-42) : (-14) = (-21) : \boxed{} = 3 : \boxed{} =$
$= 4{,}2 : \boxed{} = \boxed{} : (-28) = (-0{,}3) : \boxed{} =$
$=$

2. Составьте аналогичное задание, используя действие а) сложения, б) умножения.

3. Сформулируйте выводы, например, в таком виде: *«Частное не изменится, если делимое и делитель*

Задание 88. Вставьте пропущенные знаки <, >, =:

$(a - b) \cdot b : b \bigcirc 0;$

$(a - b) \cdot (b - a) \bigcirc 0;$

$(c - a) \cdot (b - a) \bigcirc 0;$

$(c - b) \cdot (b - a) \cdot (c - a) \bigcirc 0;$

$a - c \bigcirc a - b;$

$a - b \bigcirc b - a;$

$|a - b| \bigcirc |b - a|;$

Задание 89. 1. Заполните пропуски в равенствах:

Если ● + ■ = −3, то

● + 10 + ■ = □

● + ■ − 13 = □

3 · ● + 3 · ■ = □

(−13 + ■ + ●) : 2 = □

2. Составьте подобное задание.

Задание 90. 1. Верно ли, что $3a > a$ при любых значениях a? Подтвердите свой вывод примерами.

2. Сформулируйте и выполните аналогичное задание для:

$a + 3 > a$,

$a - 3 < a$.

Задание 91. 1. Вместо a и b поставьте такие числа, чтобы:

а) равенства были верными,

б) равенства были неверными.

$|a| + |b| = |a + b|$;

$|a| - |b| = |a - b|$;

$|a| \cdot |b| = |a \cdot b|$;

$|a| : |b| = |a : b|$.

2. При каких значениях a и b выполняется каждое равенство?

Задание 92. 1. Поставьте знаки действий так, чтобы равенства были верными:

$(-10) \bigcirc (-20) \bigcirc (-40) = 790$;

$(-10) \bigcirc (-20) \bigcirc (-40) = 160$;

$(-10) \bigcirc (-20) \bigcirc (-40) = 50$;

$(-10) \bigcirc (-20) \bigcirc (-40) = -9{,}5$;

$(-10) \bigcirc (-20) \bigcirc (-40) = -810$.

2. Составьте еще несколько равенств с числами −10; −20; −40.

Задание 93. Заполните пропуски:

а) $6 \cdot 24 - 6 \cdot 76 = -6 \cdot (\square) = -12(\square) = -24(\square) = -52(\square) = \square$;

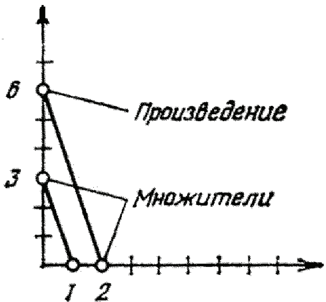
б) $1000 - 159 + 147 = 1000 - \square = \square$;

в) $10{,}9 - 11{,}3 - 1000 = -1000 + \square = \square$;

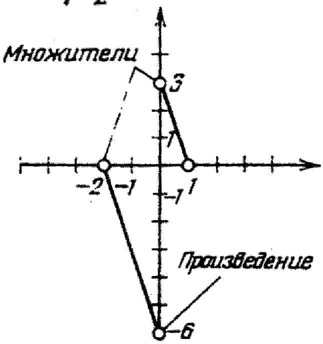
г) $-1000 - 38{,}4 + 40 = -1000 - \square = \square$.

Задание 94. В книге венгерского математика Имре Ружа «Основание математики» есть рисунки, которые автор назвал диаграммами умножения.

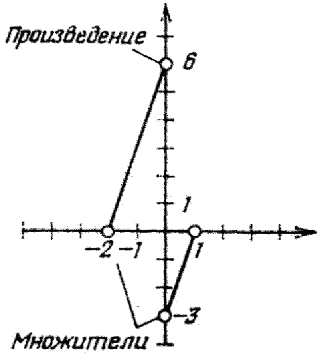
1. Сделайте пояснения к этим рисункам.



$\square \cdot \square = \square$

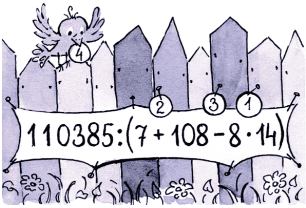


$\square \cdot \square = \square$



$\square \cdot \square = \square$

2. Придумайте свои иллюстрации (схемы, рисунки, модели) к умножению целых чисел.



Порядок в действиях

Задание 95. 1. Вычислите устно:

$1 - 3 + 5 - 7 + 9 - \ldots - 37 + 39 - 41 = \boxed{}$;

$-1 + 2 - 3 + 4 - 5 + \ldots + 98 - 99 = \boxed{}$;

$100 - 101 + 102 - 103 + \ldots - 199 + 200 = \boxed{}$.

2. Составьте свои примеры для устного счета.

Задание 96. 1. Сравните с нулем или со значением другого числового выражения:

$(-1) \cdot (-2) \cdot (-3)$ ◯ 0;

$(-1) \cdot (2) \cdot (-3) \cdot (-4)$ ◯ 0;

$(-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-4) \cdot (-5)$ ◯ 0;

$(-1) \cdot (+2) \cdot (-3) \cdot (+4) \cdot (-5)$ ◯ 0;

$(-1) \cdot (-2) \cdot (+3) \cdot (-4) \cdot (-5)$ ◯ 0;

$(-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-4) \cdot (+5)$ ◯ $(-1) \cdot (-2) \times$
$\times (-3) \cdot (+4) \cdot (+5)$;

$(-1) \cdot (-22) \cdot (+333) \cdot (+4444) \cdot (-55{,}55)$ ◯ $(-1) :$
$: (-20) \cdot (-30) : (-40)$.

2. Закончите утверждение:

«Произведение нескольких числел больше нуля, если ______________________________».

3. Используя это утверждение, составьте свои примеры.

Задание 97. 1. Вставьте необходимое слово («больше», «мешьше»):

а) «Сумма 20 отрицательных чисел ______________ нуля».

б) «Произведение 20 отрицательных чисел ______________ нуля»

2. Сформулируйте подобные утверждения относительно 2000 чисел, 2007 чисел.

3. Составьте аналогичные задания.

Задание 98. 1. Заполните пропуски:

$-a - b = -(\boxed{})$;

$a + b = -(\boxed{})$;

$a - b = -(\boxed{})$;

$-a + b = -(\boxed{})$.

2. Запишите пары выражений, значения которых противоположны при любых значениях a и b.

3. Выберите выражения, значения которых противоположны при любых значениях букв.

$-a(c - b)$

$a(b + c)$ $a(c - b)$

$-a(b + c)$ $-a(-b - c)$

$a(b - c)$ $a(-b - c)$

$-a(-b - c)$ $-a(-b + c)$

$a(-b + c)$

Задание 99. 1. Значения каких из следующих числовых выражений отрицательны? Найдите эти значения.

а) $-16{,}48 : (-16) - 5{,}4 : (-0{,}9) + (-9{,}1) \cdot (-0{,}91) =$

$=$

б) $16{,}48 : (-16) - 5{,}4 : 0{,}9 - (-9{,}1) : (-0{,}91) =$

$=$

в) $-16{,}48 : (-16) - (5{,}4 : (-0{,}9)) + (-9{,}1) : (-0{,}91) =$

$=$

г) $16{,}48 : (-16 - 5{,}4 : (-0{,}9) + (-9{,}1) : (-0{,}91)) =$

$=$

2. Составьте выражение, содержащее 6 действий, значение которого:

а) отрицательно;

б) положительно;

в) равно нулю.

Викторина

Верно ли, что:

1. Меньшее число имеет меньший модуль?

   да нет

2. Если число a расположено левее числа x на числовой прямой, то $a - x < 0$?

   да нет

3. Если модули чисел равны, то и числа равны?

   да нет

4. Что всегда можно точно вычислить результат действий с целыми числами?

   да нет

5. При любом значении x точка A $(x; 1)$ расположена выше оси OX на координатной плоскости?

   да нет

6. Не существует числа противоположного самому себе?

   да нет

7. Произведение может быть противоположно одному из множителей.

   да нет

8. Если сумма двух чисел равна нулю, то модули этих чисел равны?

   да нет

9. Если произведение четырех чисел отрицательно, то хотя бы одно из них положительно?

   да нет

10. $2a$ всегда больше a?

    да нет

Раздел III

ИССЛЕДУЙТЕ, РЕШАЙТЕ, СОЗДАВАЙТЕ

В этом разделе содержатся задания, которые, возможно, помогут выбрать тему для проведения самостоятельного индивидуального или группового исследования, принять участие в совместных исследовательских проектах, в том числе телекоммуникационных, с участием школьников разных городов, представить результаты на ученических конференциях и конкурсах по математике.

ТВОРЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

Задание 1. Наташа пропустила по болезни урок, на котором рассматривали правила сложения целых чисел. Как бы вы объяснили ей, что

$(-2) + (+7) = +5; \quad (+7) + (-12) = -5?$

Указание. Вы можете посмотреть разные учебники. В каких из них, вы считаете, эта тема излагается понятно и интересно?

Задание 2. Подготовьте выставку материалов по истории отрицательных чисел.

Указание. Обратитесь к математическим энциклопедиям, справочной сети Интернет и т.д.

Задание 3. Подготовьте сборник заданий по теме «Положительные и отрицательные числа», составленных учениками вашего класса.

Указание. Постарайтесь поместить в сборник разнообразные и интересные задания.

Задание 4. Подготовьте электронную презентацию по теме «Положительные и отрицательные числа, действия над ними».

Указание. Постарайтесь поместить в презентацию разнообразные и интересные материалы, чтобы они были представлены ярко, красочно и запоминались.

Задание 5. Сочините математическую сказку о положительных и отрицательных числах.

Указание. В сказках участвуют какие-то персонажи, выполняются действия, имеются какие-то преграды или требуется выполнить какие-то условия. Ясно, что преграды и действия должны быть связаны с положительными и отрицательными числами. Сочиняя свою математическую сказку, может быть стоит вспомнить любимые сказки своего детства и разобраться с тем, каким образом они устроены.

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ ЗАДАНИЯ

Предлагаем понаблюдать за действиями над числами, высказать свои предположения, проверить их и продолжить начатые исследования.

Исследование 1

В данном исследовании предлагаем понаблюдать за действиями над однозначными числами, сравнить исходный набор цифр (однозначных чисел), с теми которые получаются в результате этих действий, высказать предположения, проверить их, оценить результаты своей работы и выйти на новые исследовательские задачи. Приступим...

1. Запишите набор цифр: 0 1 3 7.

Предлагаем выполнить следующие действия:

1) сложите числа 0, 1, 3 и 7;

2) запишите число, полученное в разряде единиц суммы;

3) запишите полученную цифру вместо первой исходного набора цифр.

Получили набор цифр: 1 1 3 7.

Если теперь сравнить исходную четверку чисел с четверкой после выполнения действий, то видно, что имеется только одно изменение – первая цифра 0 заменилась на цифру 1. Однако мы только в начале нашего исследования. Пока не видно ничего интересного и непонятно, что и как делать дальше. Естественен вопрос: *Что дальше?*

Часто после первого шага (как в нашем случае), если не удается заметить что-то интересное или высказать предположение, то можно выполнить действия еще несколько раз или взять другие объекты. А принимает решение тот, кто проводит исследование.

Пусть, например ученик Коля, решил повторить действия. Предлагаем и вам:

повторите действия 1)–3) с набором цифр 1 1 3 7, далее повторите эти действия с наборами цифр еще девять раз, сравните их друг с другом и с исходным набором.

Проверьте правильность выполнения действий Колей:

0 1 3 7
1 1 3 7
2 1 3 7
3 1 3 7
4 1 3 7

5 1 3 7
6 1 3 7
7 1 3 7
8 1 3 7
9 1 3 7
0 1 3 7

Сравнение показывает, что последний набор совпал с исходным набором цифр. Это интересный факт. Мимо этого факта не следует проходить: такое совпадение, как правило, позволяет сформулировать новые исследовательские вопросы:

Будет ли такое совпадение, если взять первоначально другой набор цифр?

Если совпадение цифр будет, то сколько раз придется повторить действия, чтобы произошло такое совпадение?

Для ответа на эти вопросы и проводятся другие эксперименты. Для этого следует назвать цель новых экспериментов, определить те действия, которые будут выполняться, определить то, каким образом будут фиксироваться результаты экспериментов.

Вот, каким образом рассуждал школьник Коля:

– я предполагаю, что будет совпадение всегда;

– цель экспериментов: проверить будет ли совпадение при выборе другого набора цифр;

– возьму несколько наборов и повторю такие же действия;

– буду записывать все новые наборы цифр, которые будут получаться.

2. Предлагаем провести свой эксперимент. Выполните следующие действия:

1) выберите любые четыре различные цифры:
__ __ __ __;

2) сложите эти числа;

3) запишите число, полученное в разряде единиц суммы;

4) запишите полученную цифру вместо первой исходного набора цифр.

Повторите действия 2)–4) с получаемыми таким образом наборами цифр еще девять раз.

Был ли момент, когда получили набор, совпадающий с исходным набором цифр?

Сформулируйте вывод.

Выбрал(а) набор цифр __ __ __ __, *получилось* _______ *после* ___ *повторений.*

Если вы получили набор, совпадающий с исходным набором цифр, то попробуйте сформулировать гипотезу и проверить ее.

Итак, имея совпадение в нескольких случаях, можно высказать предположение об исходе аналогичных действий при любом наборе цифр: **совпадение наступает всегда.**

Это предположение требуется проверить в соответствии с теми правилами, которые приняты в той области, в которой вы проводите исследования.

К примеру, если вы физик-экспериментатор, то для проверки вы планируете и проводите новые эксперименты. Если же вы математик, то должны доказать свое предположение. В этом случае даже очень большое число экспериментов не будет принято за доказательство.

Сравните свое обоснование выдвинутой гипотезы со следующими доказательствами, которые приводят ученики.

Доказательство первого ученика. Всего существует десять цифр. Если сделаем одиннадцать повторений, то хотя бы две цифры станут одинаковыми. Это и означает, что наступило совпадение.

Доказательство второго ученика. Пусть исходный набор цифр: *а б в г*. Для нас важны цифра *а* и цифра единиц числа (*б* + *в* + *г*). Чтобы найти цифру, которую следует поставить вместо *а*, требуется найти сумму числа *а* и числа (*б* + *в* + *г*). Потом взять число единиц этой суммы. Обозначим это число через $а_1$. Тогда на следующем шаге к числу $а_1$ прибавляем число единиц суммы (*б* + *в* + *г*). Эта цифра совпадет с последней цифрой суммы *а* + 2(*б* + *в* + *г*).

На следующем шаге цифра совпадает с цифрой единиц числа *а* + 3(*б* + *в* + *г*). При десятом повторении число совпадет с последней цифрой числа суммы *а* и произведения 10 на число единиц суммы (*б* + *в* + *г*). Так как последняя цифра 10(*б* + *в* + *г*) равна 0, то последняя цифра суммы *а* + 10(*б* + *в* + *г*) совпадет с *а*.

Набор совпал с исходным набором.

Доказательство третьего ученика. Для определения цифры, которую следует поставить вместо числа *а*, важно знать число единиц суммы (*б* + *в* + *г*). Это может быть одна из цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Если число единиц в сумме (*б* + *в* + *г*) равно 0, то совпадение наступает на первом шаге.

Если число единиц в сумме (*б* + *в* + *г*) равно 1, то совпадение наступает на десятом шаге. Далее ученик привел рассуждения при других значениях в разряде единиц числа (*б* + *в* + *г*).

Итак, набор совпадет с исходным набором.

Какое из доказательств нравится вам. Нет ли здесь ошибок в обоснованиях?

Итак, если взять первоначально любой набор из четырех цифр, то через определенное количество описанных действий обязательно получим набор, совпадающий с исходным набором цифр. Но это еще не все...

Предлагаем поставить следующий вопрос: *можно ли по исходному набору цифр определить, сколько требуется повторений действий для совпадения набора цифр с первоначальным набором?*

Давайте зафиксируем те действия, которые вы выполнили в ходе проведенного исследования:

• Выполнили действия, которые было предложено выполнить над исходным набором цифр.

• Получили новый набор цифр.

• Сравнили и увидели различие в наборах цифр. Не знали, что делать дальше.

• Выбрали одну из рекомендаций – провели дополнительные эксперименты. Это позволило высказать предположение и доказать его.

3. Можно ли указать наборы цифр *а б в г*, в которых совпадение наступает, начиная с:

а) первого шага;

б) второго шага;

в) третьего шага;

г) четвертого шага;

………………………..

к) десятого шага?

Важно понимать, что реально при проведении исследований часто бывает так, что ответы могут быть найдены не сразу, поэтому следует быть готовым проявить настойчивость и терпение.

4. Проверьте правильность заполнения следующей таблицы.

Последняя цифра суммы (*б* + *в* + *г*)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Набор совпадет с исходным набором *а б в г* после выполнения действий столько-то раз	1	10	5	10	5	2	5	10	5	10

Теперь, пользуясь данными таблицы, можно сразу по исходному набору цифр указать, сколько потребуется повторений до первого совпадения.

Приведем рассуждение школьника Коли, который использовал таблицу с результатами исследования.

Коля записал набор цифр: 2 4 6 7. Итак, через сколько повторений произойдет совпадение набора цифр с исходным набором?

1. Находим сумму $4 + 6 + 7 = 17$.

2. Находим цифру единиц числа 17. Это число 7.

3. Из таблицы определяем, что требуется 10 повторений до первого совпадения с исходным набором.

Для проверки последовательно получаем:

2 4 6 7
9 4 6 7
6 4 6 7
3 4 6 7
0 4 6 7
7 4 6 7
4 4 6 7
1 4 6 7
8 4 6 7
5 4 6 7
2 4 6 7

Совпадение наступило после _____ действий.

5. Важно понять, что практически всегда можно думать над вопросом типа: *Что исследовать дальше?*

Один из вариантов ответа: *Следует определить то общее, что было в исследуемых ситуациях, и рассмотреть новую ситуацию, изменив это общее.*

Как вы считаете, что было общее во всех экспериментах? Сравните свои выводы со следующими:

- записывали число единиц суммы *вместо первой цифры*;
- использовали *четыре цифры*;
- *выбирали цифры*.

Таким образом, можно формулировать новые исследовательские задачи.

6. Как отказаться от того, что *записывали число единиц суммы вместо первой цифры?*

Школьники легко указывают: пусть последняя цифра суммы на каждом шагу записывается в исходном наборе вместо:

а) второй цифры;

б) третьей цифры;

в) четвертой цифры.

Предлагаем выполнить это исследование самостоятельно. Не забудьте об обоснованиях.

7. Далее можно поставить вопрос: *Как отказаться от условия «выбирали четыре цифры»?*

Предлагаем изменить количество цифр в исходном наборе: на первом шаге записать ____ цифр, например __ __ __ __, и самостоятельно провести исследование.

8. Заметим, что *во всех случаях рассматривали цифры (однозначные числа)*.

Как отказаться от этого общего? Найти отказ от общего удается не всем и не сразу, поэтому к вопросу приходится возвращаться несколько раз.

Поиску ответа способствует то обстоятельство, что вы на уроках математики постоянно изучаете что-то новое. Если вспомнить, что нового было изучено на уроках математики к этому времени, то можно признать – изучены отрицательные числа и действия с ними. Это и позволяет провести новые исследования, используя отрицательные числа.

9. Проведите исследования с набором чисел:

а) $2 \quad 3 \quad -4 \quad 5$;

б) $2 \quad -3 \quad -4 \quad 5$;

в) $2 \quad -5 \quad -8 \quad 5$.

Эксперименты с набором 2 3 −4 5:

2 3 −4 5
___ 3 −4 5
___ 3 −4 5
___ 3 −4 5
___ 3 −4 5
___ 3 −4 5
___ 3 −4 5

Для набора 2 3 −4 5 после _____ повторений новый набор __ __ __ __ с _________ набором. Что можно сказать о результатах в этом случае?

Эксперименты с набором 2 −3 −4 5:

2 −3 −4 5
___ −3 −4 5
___ −3 −4 5
___ −3 −4 5
___ −3 −4 5
___ −3 −4 5
___ −3 −4 5

Для набора чисел 2 −3 −4 5 не происходит совпадения с исходным __ __ __ __, но происходит совпадение с набором ___________.

Итак, ситуация изменилась. Теперь предлагаем попытаться самостоятельно сформулировать новые вопросы и найти ответы на них. Среди вопросов имеет смысл подумать над такими:

Что произойдет, если сумма чисел $б + в + г$ равна 0? положительна? отрицательна?

Как определить набор чисел, на котором произойдет совпадение с тем, который был первоначально?

Вы заметили, что при использовании отрицательных чисел наблюдаются отличия от случаев, когда рассматривались цифры?

10. Если вы интересуетесь компьютерами, то можно, научившись программировать (для этого можно отложить исследования с числовыми наборами и заняться совершенствованием в программировании), подготовить программы, в которых используются наборы цифр.

Попробуйте написать программу, которая работает следующим образом: пользователь вводит четыре числа и выбирает одно из заданий, которое должна выполнить программа:

– назвать набор чисел, который получается после выполнения определенных действий над ними;

– назвать число повторений действий, которые следует выполнить до первого совпадения с исходным набором (если будет такой вариант);

– пользователь указывает, через сколько повторений происходит совпадение с исходным набором, а программа проверяет и указывает правильно или нет определено число;

– программа выдает все наборы чисел до первого совпадения с первоначальным набором.

11. По результатам этого исследования можно подготовить сообщение на математической конференции школьников.

Исследование 2

В данном исследовании предлагаем продолжить наблюдения за действиями над числами, теперь расставленными в таблице 3 х 3. Сравнивайте, высказывайте предположения, проверяйте их, формулируйте новые исследовательские задачи.

Рассмотрим таблицу с числами.

Две клетки называют *соседними*, если они имеют общую сторону.

10	23	14
25	12	16
31	15	17

Таблица 1

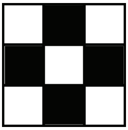
К примеру, клетки, в которые записаны числа 10 и 23 соседние. Числа, записанные в соседних клетках, будем называть так же соседними. Клетки с числами 10 и 14 не являются соседними.

1. Какой вид примет исходная таблица, если к числу 10 и одному из его соседей прибавить по 3?

2. Каким образом из исходной таблицы 1 была получена такая таблица:

10	23	14
25	14	16
31	17	17

Таблица 2



3. Рассмотрим таблицу, которая раскрашена в черный и белый цвета (как обычная шахматная доска).

А) Найдите в таблице 1сумму чисел в клетках черного цвета.

Б) Найдите в таблице 1 сумму чисел в клетках белого цвета.

В) Найдите разность между суммой чисел в черных и белых клетках.

Г) Найдите в таблице 2 сумму чисел в черных клетках.

Д) Найдите в таблице 2 сумму чисел в белых клетках.

Е) Найдите разность между суммой чисел в черных и белых клетках таблицы 2.

Сравните разность между суммами чисел в черных и белых клетках.

4. Прибавьте к числу 12 и его соседу 16 по 5. Получаем новую таблицу 3.

А) Найдите сумму чисел в клетках черного цвета таблицы 3.

10	23	14
25	17	21
31	15	17

Таблица 3

Б) Найдите сумму чисел в клетках белого цвета таблицы 3.

В) Найдите разность между суммой чисел в черных и белых клетках таблицы 3.

Г) Сравните разность сумм в таблицах 1–3.

Какое предположение можно сделать о разностях между суммами в черных и белых клетках таблиц?

5. Что нужно сделать для проверки предположения? Выполните проверку, выбирая новую клетку таблицы 1, его соседа и выполняя прибавление к каждому какого-нибудь числа.

6. Выберите число и прибавьте его к числу 12 и любому из его соседей.

А) Найдите сумму чисел в клетках черного цвета.

Б) Найдите сумму чисел в клетках белого цвета.

В) Найдите разность между суммой чисел в черных и белых клетках.

Г) Сравните разности сумм в исходной и этой таблице.

Подтвердилось ли предположение?

Рассмотрим новую таблицу 4.

А) Назовите соседей с числом –12.

Б) Прибавим –5 к числу –12 и его соседу 7. Получаем таблицу 5.

-5	-6	7
11	0	-12
-61	-15	14

Таблица 4

В) Найдите сумму чисел в черных клетках таблицы 4.

-5	-6	2
11	0	-17
-61	-15	14

Таблица 5

В) Найдите сумму чисел в белых клетках таблицы 5.

Г) Найдите разность между суммами чисел таблицы 4 в черных и белых клетках.

Д) Найдите сумму чисел в черных клетках таблицы 5.

Е) Найдите сумму чисел в белых клетках таблицы 5.

Ж) Найдите разность между суммами чисел в черных и белых клетках таблицы 5.

З) Сравните разности между суммами в таблицах 4 и 5.

7. Выберите новое число в исходной таблице и к его соседним прибавьте число 10. Выполните следующие действия.

А) Найдите сумму чисел в клетках черного цвета.

Б) Найдите сумму чисел в клетках белого цвета.

В) Найдите разность между суммой чисел в черных и белых клетках.

Г) Сравните разность чисел в исходной таблице и той, которую получили самостоятельно.

8. Какое предположение по результатам сравнений сумм можно сделать?

Выполните еще одну проверку своего предположения, используя новую таблицу 6.

-12	-5	4
-10	4	-1
-5	-6	-2

Таблица 6

9. Ученик свое предположение сформулировал следующим образом. Рассмотрите таблицу 7.

А	Е	Ж
Б	Д	З
В	Г	И

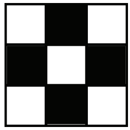
Таблица 7

Если в таблице 7 выбрать:

– число;

– его соседа

и любое число *к*, которое прибавить к выбранным числам таблицы, то разность между суммой чисел в черных клетках и белых клетках будет одна и та же для исходной таблицы.



Изучите следующее доказательство.

Рассмотрим таблицу с шахматной закраской.

Из этой таблицы видно, что при любом выборе числа и его соседа цвета у них будут разные. Это значит, что, прибавляя число *к* к числу из таблицы и любому его соседу, мы его прибавляем к клеткам разного цвета. Так как разность чисел не меняется, если к уменьшаемому и вычитаемому прибавить одно и то же число, то разность между суммами чисел в черных и белых клетках не меняется.

10. В таблице 3 х 3 расставлены числа (таблица 8). Одним ходом разрешается к любым двум соседним числам (то есть стоящими в клетках, имеющих общую сторону) прибавить одно и то же число. Можно ли за несколько ходов получить из таблицы 8:

1	0	2
3	4	0
2	5	6

Таблица 8

а) таблицу, в которой стоят одни нули?

б) таблицу, в которой в одной клетке стоит 0, а в других клетках 1?

в) таблицу 9?

1	0	1
0	3	0
1	0	1

Таблица 9

-1	0	-2
-3	3	0
2	-1	-6

Таблица 10

11. Докажите, что из таблицы 10, выполнив несколько ходов, описанных в пункте 10, можно за несколько ходов получить таблицу, в которой стоят одни нули.

12. Докажите, что из таблицы 11 можно получить таблицу 12.

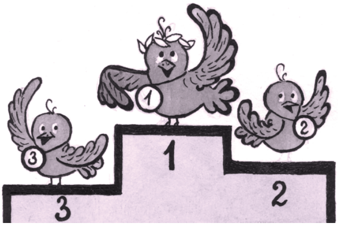
0, 1	-4	0, 2
-3	0	9
0, 3	-1	0, 4

Таблица 11

1	0	1
7	3	0
1	0	1

Таблица 12

13. Предложите задачи с таблицами а) 3x3; б) 4x4.



ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

Задание 1. У Пети три брата. Первый старше Пети на три года, второй моложе Пети на три года, третий моложе Пети втрое. Зато отец старше Пети втрое. Всем вместе 95 лет. Сколько лет каждому?

Задание 2. В день своего рождения Саша принес в класс кулек конфет.

– Сколько у тебя конфет? – спросили ребята.

– Я помню, – сказал Саша, – когда я их раскладывал парами, тройками и четверками, то каждый раз оставалась одна лишняя конфета, а когда раскладывал пятерками, лишних не было. И всего их меньше пятидесяти.

Сколько конфет принес Саша?

Задание 3. Все натуральные числа от 1 до 100 разбили на две группы: четные и нечетные. Можно ли определить, в какой из групп сумма всех цифр, использованных для записи чисел, больше и насколько?

Сформулируйте и решите задачу с числами от 1 до 1000.

Задание 4. В трех ящиках лежит по одному шарику: белый, черный и зеленый. На первом ящике надпись: «белый», на втором – «черный», а на третьем – «белый или зеленый». Но ни одна надпись не соответствует действительности. Можно ли сказать, какой шарик лежит в каждом из ящиков?

Задание 5. Можно ли по кругу расставить 6 различных чисел так, чтобы каждое из них равнялось произведению двух соседних с ним?

Задание 6. (К. 6. 1992). На балу каждый кавалер танцевал с тремя дамами, а каждая дама танцевала с тремя кавалерами. Докажите, что число кавалеров равно числу дам.

Задание 7. На карточках написаны числа 23; 501; 341; 55; 9; 12. Предлагается записать наименьшую дробь вида:

а) 0,*************;

б) $\dfrac{10000000000000}{*************}$,

где ************* – число, записываемое числами с карточек (карточки прикладываются друг к другу, образуя одно число. Нельзя менять порядок чисел на карточках.

Задание 8. Найдите наименьшее натуральное нечетное число, у которого сумма цифр равна а) 2007; б) 2008.

Задание 9. Петя может в числе 2047698 переставить местами любые две цифры а) одинаковой четности; б) разной четности.

1. Какое наибольшее число он может получить таким образом?

2. Какое наименьшее число он может получить таким образом?

3. Какое наибольшее число он может получить таким образом?

4. Какое наименьшее число он может получить таким образом?

Задание 10. Имеется набор из десяти карточек, на каждой из которых написано по одной цифре, причем каждая цифра встречается ровно по одному разу.

1. Какую наибольшую пару последовательных натуральных чисел можно составить из этих карточек?

2. Какую наибольшую пару последовательных четных чисел можно составить из этих карточек?

3. Какую наибольшую пару последовательных нечетных чисел можно составить из этих карточек?

Задание 11. 1. Можно ли покрыть 31 косточкой домино шахматную доску, у которой отпилены:

а) две любые соседние клетки у края доски?

б) две любые угловые клетки на одной стороне доски?

в) два противоположных угла (лежащих на одной диагонали)?

2. Можно ли покрыть 28 косточками домино шахматную доску, у которой отпилены по четыре клетки в двух противоположных по диагонали углах (осталось 56 клеток)?

Задание 12. Двое играющих поочередно вынимают из двух ящиков шары. В свой ход каждый может взять из любого, но только одного ящика любое число шаров. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Кто и как может выиграть, если в ящиках:

а) 121 и 97 шаров;

б) 121 и 121 шар.

Задание 13. Белка за 20 минут приносит орех в гнездо. Далеко ли от гнезда орешник, если известно, что без ореха белка бежит со скоростью 5 м/с, а с орехом – 3 м/с?

Задание 14. Найдите наименьшее из натуральных чисел, которое при делении на 2 дает в остатке 1, при делении на 3 дает остаток 2, при делении на 4 дает в остатке 3, при делении на 5 дает остаток 4.

Задание 15. (Вступительная задача в ФМШ при МГУ). Борис задумал натуральное число, умножил его на 13, зачеркнул последнюю цифру результата, полученное число умножил на 8, опять зачеркнул последнюю цифру результата и получил число 20. Какое число задумал Борис? Найдите все возможные ответы и докажите, что других нет.

Задание 16. Докажите, что среди любых трех целых чисел можно выбрать два, сумма которых четна.

Задание 17. В классе 28 учеников. Витя сделал в диктанте 13 ошибок, остальные допустили ошибок меньше. Докажите, что в этом классе найдутся по крайней мере три человека, которые допустили одинаковое число ошибок в диктанте (возможно, ни одной ошибки).

Задание 18. В группе детского сада 15 детей. Всегда ли существует месяц, в который отмечают свой день рождения а) двое детей; б) трое детей?

Задание 19. Докажите, что среди любых 7 натуральных чисел найдутся два числа, разность которых делится на 6.

Задание 20. Двое играют в такую игру: Ладья стоит на поле a1. За ход разрешается сдвинуть ладью на любое количество клеток вправо или на любое количество клеток вверх. Выигрывает тот, кто первым поставит ладью на поле h8.

Кто выигрывает при правильной игре?

Указания к олимпиадным заданиям по математике

Задание 3. Используйте пары чисел {100; 1}, {2; 3}, ...{98; 99}.

Задание 4. Начните с ящика, на котором надпись: «белый или зеленый».

Задание 5. Можно попытаться подобрать нужные числа.

Задание 6. Подсчитайте двумя способами число танцующих пар.

Задание 7. а) из двух десятичных дробей меньше та, в которой старший разряд меньше;

б) частное будет наименьшим, если делитель является наибольшим.

Задание 8. Из двух натуральных чисел меньше то, в котором меньше цифр. Подумайте, в каком случае в искомом числе будет наименьшее число цифр.

Задание 11. 1. Проверьте: можно покрыть любую целую строку и любые две строки, одна из которых с вырезами.

2. Докажите, что при удалении двух крайних клеток с одной стороны можно уложить на ней косточки домино.

3. Примените обычную раскраску доски и то, что при любом положении костяшки она закрывает черную и белую клетки. Какие цвета клетки доски, лежащие на концах диагонали?

Задание 13. Составьте и решите уравнение.

Задание 14. Прибавьте к искомому числу 1.

Задание 15. Начните с конца, определив, какую цифру можно приписать к числу 20, чтобы получить число, делящееся на 8.

Задание 16. Рассмотрите разные варианты количеств четных и нечетных чисел среди исходных чисел. Докажите, что в каждом случае можно выбрать два, сумма которых делится на 2.

Задание 17. Используйте тот факт, что ученики могли допустить 0, 1, 2, 3, 4, ..., 12 ошибок.

Задание 20. Используйте главную диагональ доски.

Решения олимпиадных задач

Задание 1. Пусть x лет – возраст Пети. Тогда его братьям $x + 3$, $x - 3$ и $x : 3$ года, соответственно, а его отцу – $3x$ лет. Составляем уравнение:

$x : 3 + (x - 3) + (x + 3) + 3x = 95.$

Решив его, получим $x = 15$.

Ответ: 15 лет.

Задание 2. Пусть x – количество конфет. Тогда $x - 1$ делится на числа 3 и 4, а, следовательно, и на 12. Тогда найдётся такое натуральное n, что $x = 12n + 1$. Кроме того, x делится на 5, значит, $12n + 1 = 5m$ для некоторого натурального m. Так как $x < 50$, то единственная подходящая пара чисел n и m – это $n = 2$, $m = 5$. При этом $x = 25$.

Ответ: 25 конфет.

Задание 3. Рассмотрим пары чисел {100; 1}, {2; 3}, ..., {98; 99}.

Здесь перечислены все натуральные числа от 1 до 100.

Всего 50 пар.

В каждой паре одно число четное и одно нечетное.

В первой паре суммы цифр равны.

Во всех остальных парах сумма цифр нечетного числа на единицу больше суммы цифр четного числа. Следовательно, сумма цифр в группе с нечетными числами на 49 больше, чем сумма цифр в группе с четными числами.

Задание 4. Начнем с третьего ящика. Раз надпись на нём не соответствует действительности, значит, в нем не белый и не зелёный шарик. Получаем, что в третьем ящике чёрный шарик. В первом ящике не белый и не чёрный, значит, в нем зелёный шарик. В оставшемся втором ящике – белый.

Задание 5. Вот одно из решений: 10; 5; 0,5; 0,1; 0,2; 2.

Задание 6. Пусть на балу было x кавалеров и y дам. Тогда число танцевавших пар на балу было $3x$ (каждый кавалер танцевал с тремя дамами), если считать одним способом, и $3y$ (каждая дама танцевала с тремя кавалерами), если другим. Тогда $3x = 3y$ и $x = y$.

Задание 7. а) наименьшую цифру среди чисел, заданных в условии, имеет число 12, поэтому сразу после запятой должны стоять цифры 1,2. Наименьшую первую цифру из остальных чисел имеет число 23, поэтому после цифр 1 и 2 следует поставить цифры 2 и 3. Аналогично выбираем последующие цифры.

Это приводит к числу 0,1223341501559;

б) $\dfrac{1000000000000}{933301341231 2}$.

Задание 8. Из двух натуральных чисел меньше то, в котором меньше цифр. Так как известна сумма цифр искомого числа, то число содержит наименьшее число цифр в том случае, когда цифры наибольшие из возможных.

1. Число 2007 делится на 9, поэтому искомое число 999...9 (223 девятки).

2. Число 2007 при делении на 9 дают в частном 223 и в остатке 1, поэтому наименьшее число 1999...9 (223 девятки).

Задание 9. 1. На первом месте в числе 2047698 стоит чётная цифра 2, меняем её местами с самой большой чётной цифрой в этом числе – с 8. На втором месте стоит чётная цифра 0, меняем её местами с самой большой из оставшихся чётных цифр в этом числе – с 6. И т.д. В итоге получим число 8649270.

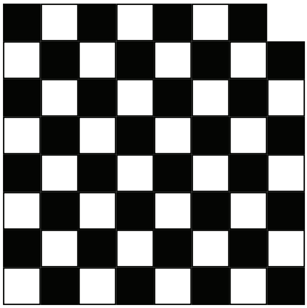
2. Поскольку цифры исходного числа, начиная с первой, наименьшие из присутствующих в числе цифр той же чётности, исходное число – наименьшее.

3. Покажем, как такими заменами можно получить число 9876420 из исходного числа. Произведём перестановки цифр в таком порядке: 2 и 9, 7 и 0, 7 и 8, 7 и 4, 7 и 6, 7 и 0, 7 и 4, 7 и 0, 7 и 4, 7 и 6.

4. Покажем, как такими заменами можно получить число 2045789 из исходного числа. Произведём перестановки цифр в таком порядке: 7 и 6, 8 и 9.

Задание 10. а) 79, 80; б) 68, 70; в) 79, 81.

Задание 11. 2. Раскрасим доску, у которой отрезаны два противоположных угла на диагонали, в шахматном порядке.



Каждая косточка домино (при любом размещении на доске) закрывает черный и белый квадрат. У доски отпилено два белых (черных) квадрата. Из 62 квадратов, которые остались 30 одного цвета и 32 другого, которые 31 косточкой покрыть не удастся.

Ответ: а) и б) можно; в) нельзя.

Задание 12. а) выиграет первый игрок, если своим первым ходом он возьмёт из первого ящика 24 шара, оставив в обоих ящиках по 97 шаров, а после каждого нового хода второго игрока он будет забирать столько же шаров, что и второй игрок, только из другого ящика. Тогда после каждого хода первого игрока в ящиках будет находиться одинаковое число шаров, и такая стратегия приведёт его к выигрышу;

б) выиграет второй игрок, если будет придерживаться той же стратегии, что и первый игрок в пункте а).

Задание 13. Пусть x секунд белка бежит до орешника. Тогда $(1200 - x)$ секунд белка бежит домой с орехом. В первом случае она пробегает $5x$ метров, а во втором случае пробегает расстояние $3(1200 - x)$. Так как белка пробегает одно и то же расстояние, то получаем уравнение:

$5x = 3(1200 - x)$.

Решив уравнение, получим $x = 450$ (секунд), значит, расстояние от гнезда до орешника 2250 метров.

Ответ: 2250 метров.

Задание 14. Если к искомому числу прибавить 1, то оно будет делиться на 2, 3, 4 и 5. Наименьшим из таких чисел является число: $3 \cdot 4 \cdot 5=60$. Искомое число 59.

Ответ: 59.

Задание 15. (вступительная задача в ФМШ при МГУ).

Проверка показывает, что только числа 200 и 208 делятся на 8. Это значит, что до умножения на 8 у Бориса могли быть только числа

200:8=25 и 208:8=26.

Проверка показывает, что не существует цифры, приписав которую справа к числу 25 получим число, которое делится 13. К числу 26 можно приписать только цифру 0, чтобы получилось число, которое делится на 13.

Искомое число: 260:13=20.

Ответ: Борис задумал число 20.

Задание 16. Среди любых трех целых чисел найдутся либо два чётных числа, либо два нечётных. Будем говорить, что эти два числа одинаковой чётности. Но разность любых двух чисел одинаковой чётности делится на 2.

Задание 17. По условию задачи остальные ученики (кроме Вити) могли допустить 0, 1, 2, 3, 4, ..., 12 ошибок. Предположим, что в классе нет трех учеников, которые допустили одинаковое число ошибок. Тогда каждое возможное число ошибок (от 0 до 12) могли допустить не больше двух человека. В этом случае количество учеников в классе, не считая Вити, не больше чем $2 \cdot 13 = 26$, а с Витей не больше, чем 27. Но в классе 28 человек, поэтому предположение о том, что в классе нет трех учеников, допустивших одинаковое число ошибок, неверно.

Задание 18. а) Да, существует, так как если бы в каждом месяце отмечал свой день рождения один ребёнок или ни одного, то за целый год отметили бы свой день рождения не более 12 детей. Получаем противоречие с условием задачи.

б) Такого месяца может и не быть, так как возможен случай, когда на январь, февраль и март приходятся по 2 дня рождения, а на остальные 9 месяцев – по одному (всего – 15).

Задание 19. Так как любое натуральное число при делении на 6 может давать остатки от 0 до 5 (всего 6 возможных остатков), то из 7 натуральных чисел найдутся два числа, которые при делении на 6 дают одинаковые остатки. Если же взять разность этих двух чисел, то она будет делиться на 6.

Задание 20. Выигрывает второй игрок, который выполняет такие действия: после каждого хода первого он возвращает ладью на главную диагональ. Первый игрок каждым своим ходом убирает ладью с главной диагонали, значит, он не сможет достичь клетки h8, поэтому этой клетки достигнет второй.

Твоя страница

Что для вас стало важным, полезным и интересным после изучения этих разделов? Можно использовать схемы, рисунки, написать сочинение и т.д.